PREFAȚĂ,

După ce în lucrarea [5] am prezentat elementele de bază ale aşa zisei *algebre abstracte* (mulțimi ordonate, grupuri, inele, corpuri, inele de polinoame, elemente de teoria categoriilor) ca o continuare firească a acestora, în lucrarea de față se prezintă anumite elemente de *algebră liniară*.

Capitolul 1 este dedicat studiului modulelor peste un inel unitar (în cea mai mare parte presupus comutativ) şi în particular al spațiilor vectoriale. În cadrul acestui capitol o atenție deosebită este acordată studiului categoriilor de module (solicitând cititorului anumite noțiuni şi rezultate prezentate în Capitolul 5 din [5]) precum şi modulelor libere de rang finit (în particular spațiilor vectoriale de dimensiune finită peste un corp).

Capitolul 2 este dedicat studiului determinanților şi sistemelor de ecuații liniare cu coeficienți într-un corp comutativ.

Lucrarea se adresează în primul rând studenților de la facultățile de matematică şi informatică (mai ales pentru primii ani de studiu) putând fi însă utilizată şi de profesorii de matematică din învățământul preuniversitar în cadrul procesului de perfecționare (anumite paragrafe, în special cele legate de spațiile vectoriale, sunt utile şi studenților de la învățământul politehnic).

Această lucrare (ca şi [5] - a cărei continuare firească este) nu ar fi văzut lumina tiparului fără efortul deosebit depus de Dana Piciu (care printre altele, a asigurat cea mai mare parte a dificilelor operații de tehnoredactare şi corectură); folosesc acest prilej pentru a-i mulțumi pentru colaborarea la realizarea atât a acestei lucrări (cât şi a lucrărilor [4,5]), dar mai ales pentru speranța de a realiza în viitor şi alte lucrări de algebră necesare învățământului superior.

Craiova, 26 martie 2001 Prof.univ.dr. Dumitru Buşneag

CUPRINS

CAPITOLUL 1: Module şi spaţii vectoriale

Referenți ştiințifici: **Prof.univ.dr. Constantin NIȚĂ** –
UNIVERSITATEA BUCUREŞTI
Prof.univ.dr. Alexandru DINCĂ –
UNIVERSITATEA CRAIOVA

Tehnoredactare computerizată : Dana Piciu
Coperta: Cătălin Buşneag

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale

Dumitru Buşneag (coordonator),

Algebră liniară

161p.; 21 cm
Craiova – Editura Universitaria – 2001
Bibliogr .
512,512.553,516.64
ISBN **973 – 8043 – 62 – 2**

Bun de tipar: 29.03.2001
Tipografia Universității din Craiova, Strada, Al. Cuza, nr.13
Craiova, România

Published in Romania by:
EDITURA UNIVERSITARIA CRAIOVA

CAPITOLUL 1: MODULE ŞI SPAŢII VECTORIALE

În cadrul acestui capitol prin A vom desemna un inel unitar (când va fi cazul vom preciza dacă A este sau nu comutativ).

§1. Modul. Submodul. Calcule într-un modul. Operaţii cu submodule. Submodul generat de o mulţime. Laticea submodulelor unui modul. Sistem de generatori. Elemente liniar independente (dependente). Module libere. Spaţii vectoriale. Submodul maximal. Modul simplu. Factorizarea unui modul printr-un submodul. Modul factor.

Definiţia 1.1. Vom spune despre un grup abelian $(M,+)$ că este *A-modul stâng* (sau *modul la stânga peste A*) dacă este definită o operaţie algebrică externă pe M, $\varphi:A\times M\to M$, $\varphi(a,x)=ax$, pentru orice $a\in A$ şi $x\in M$ a.î. pentru oricare $a, b\in A$ şi $x, y\in M$ sunt verificate condiţiile:

(i) $a(x+y)=ax+ay$
(ii) $(a+b)x = ax+bx$
(iii) $a(bx)=(ab)x$
(iv) $1\cdot x=x$

În acest caz, elementele lui A se numesc *scalari* iar φ se numeşte *înmulţire cu scalari*.

În mod analog se defineşte noţiunea de A-modul la dreapta: un grup abelian $(M,+)$ se zice că este *A-modul drept* (sau *modul la dreapta peste A*) dacă este definită o înmulţire cu scalari, $\psi:M\times A\to M$ $\psi(x,a)=xa$, pentru orice $a\in A$ şi $x\in M$ a.î. pentru oricare $a, b\in A$ şi $x, y\in M$ sunt verificate condiţiile:

(i′) $(x+y)a=xa+ya$

(ii′) $x(a+b)=xa+xb$

(iii′) $(xa)b=x(ab)$

(iv′) $x\cdot 1=x$.

Faptul că M este un A-modul la stânga (dreapta) se mai notează şi prin $_{A}M$ (M_{A}).

Observaţia 1.2. 1. Dacă A^{o} este *inelul opus lui A* (adică inelul în care operaţia de adunare coincide cu cea de pe A iar înmulţirea de pe A^{o} se defineşte pentru a, $b\in A$ prin $a\circ b=ba$) atunci orice A-modul stâng M devine în mod canonic A^{o}-modul drept (şi reciproc), definind pentru $x\in M$ şi $a\in A^{o}$ înmulţirea cu scalari prin $x\ast a=ax$. De fiecare dată noul modul astfel obţinut se va nota prin M^{o} şi se va numi *opusul* lui M. Astfel, în cazul în care inelul A este comutativ, cum A coincide cu A^{o}, noţiunile de A-modul la stânga şi la dreapta coincid; în acest caz, despre M vom spune pur şi simplu că este *A-modul*.

2. În cazul în care inelul A este un corp K, atunci orice K-modul la stânga (dreapta) M se zice *spaţiu vectorial la stânga (dreapta)* peste K (sau K-*spaţiu vectorial*). De obicei, în acest caz grupul aditiv abelian M se notează prin V iar elementele lui V se numesc *vectori*.

În cele ce urmează (dacă nu menţionăm contrariul) prin A-modul (sau *modul* dacă nu este pericol de confuzie), vom înţelege un A-modul la stânga, (noţiunile şi rezultatele transpunându-se direct şi pentru A-modulele la dreapta). Adoptăm aceeaşi convenţie şi pentru K-spaţiile vectoriale.

Exemple 1. Inelul A devine în mod canonic A-modul considerând înmulţirea de pe A ca înmulţirea cu scalari.

2. Dacă (G, +) este grup abelian, atunci G devine în mod canonic $\mathbb{Z}$-modul definind pentru $n\in\mathbb{Z}$ şi $x\in G$ înmulţirea φ cu scalari

$$\varphi(n,x) = n\cdot x = \begin{cases} \underbrace{x+....+x}_{n\ ori} & pentru \quad n>0 \\ 0 & pentru \quad n=0 \\ \underbrace{(-x)+...+(-x)}_{-n\ ori} & pentru \quad n<0 \end{cases}.$$

3. Dacă inelul A este în plus şi comutativ, atunci inelul A[X] al polinoamelor într-o nedeterminată devine A-modul, definind pentru $a\in A$ şi $P = a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n\in A[X]$ înmulțirea cu scalari φ prin

$$\varphi(a, P) = (aa_0)+(aa_1)X+\ldots+(aa_n)X^n\in A[X].$$

4. Dacă A este comutativ, atunci grupul aditiv $M_{m,n}(A)$ al matricelor de tipul (m, n) (m, n≥1) devine în mod canonic A-modul definind înmulțirea cu scalari pentru $a\in A$ şi o matrice $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ prin $a(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}=(a\cdot a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \in M_{m,n}(A)$.

5. Considerând un număr natural $n\in\mathbb{N}^*$ şi grupul aditiv $A^n=A\times\ldots\times A$ (față de adunarea $x+y=(x_i+y_i)_{1\le i\le n}$, cu $x=(x_i)_{1\le i\le n}$ şi $y=(y_i)_{1\le i\le n}\in A^n$) atunci A^n devine în mod canonic un A-modul definind înmulțirea φ cu scalari pentru $a\in A$ şi $x=(x_i)_{1\le i\le n}\in A^n$ prin $\varphi(a, x)=(a\cdot x_i)_{1\le i\le n}\in A^n$.

6. Dacă I este un interval de numere reale, atunci mulțimea

$$C(I, \mathbb{R})=\{f : I\to\mathbb{R} \mid f \text{ este continuă}\}$$

(care devine grup abelian față de adunarea canonică a funcțiilor continue) devine $\mathbb{R}$-spațiu vectorial definind înmulțirea φ cu scalari pentru $a\in\mathbb{R}$ şi $f:I\to\mathbb{R}$ prin $\varphi(a, f): I\to\mathbb{R}$, $\varphi(a, f)(x)=af(x)$, oricare ar fi $x\in I$.

Propoziția 1.3. Dacă M este un A-modul, atunci pentru orice $a, b, a_1, \ldots, a_n\in A$ şi $x, y, x_1, \ldots, x_m\in M$ avem:

(i) $a\cdot 0=0\cdot a=0$
(ii) $(-a)x=a(-x)=-(ax)$ iar $(-a)(-x)=ax$
(iii) $a(x-y)=ax-ay$ iar $(a-b)x=ax-bx$
(iv) $(a_1+\ldots+a_n)x=a_1x+\ldots+a_nx$ iar $a(x_1+\ldots+x_m)=ax_1+\ldots+ax_m$.

Demonstrație. (i). Din $0+0=0$ deducem că $a(0+0)=a\cdot 0 \Leftrightarrow a\cdot 0+a\cdot 0=a\cdot 0 \Leftrightarrow a\cdot 0=0$. Analog deducem şi că $0\cdot a=0$.

(ii). Scriind că $a+(-a)=0$ deducem că $ax+(-a)x=0\cdot x=0$, de unde $(-a)x=-(ax)$. Analog restul de afirmații.

(iii). Se ține cont de (ii).

(iv). Se face inducție matematică după m şi n.■

Definiția 1.4. Fiind dat un A-modul M, o submulțime nevidă M′ a lui M se zice *submodul* dacă M′ este subgrup al grupului aditiv (M,+) iar restricția înmulțirii cu scalari la M′ îi conferă lui M′ structură de A-modul.

Vom nota prin $\mathbf{L_A}(M)$ familia submodulelor lui M. În mod evident, {0} şi M fac parte din $\mathbf{L_A}(M)$. Oricare alt submodul al lui M diferit de {0} şi M se zice *propriu.* Dacă A este un inel comutativ atunci $\mathbf{L_A}(A)=\mathbf{Id}(A)$. Dacă nu este pericol de confuzie, submodulul {0} se mai notează şi prin **0** şi poartă numele de *modulul nul*.

Următorul rezultat este imediat:

Propoziția 1.5. Dacă M este un A-modul, atunci pentru o submulțime nevidă N a lui M următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) $N\in \mathbf{L_A}(M)$

(ii) Pentru orice $x, y\in N$ şi $a\in A$, $x-y\in N$ şi $ax\in N$

(iii) Pentru orice $x, y\in N$ şi $a, b\in A$, $ax+by\in N$.

Propoziția 1.6. Dacă $(N_i)_{i\in I}$ este o familie de submodule ale unui A-modul M, atunci $\bigcap_{i\in I} N_i \in \mathbf{L_A}(M)$.

Demonstrație. Fie $N=\bigcap_{i\in I} N_i$ şi $x, y\in N$ (adică $x, y\in N_i$ pentru orice $i\in I$) iar $a, b\in A$. Atunci $ax+by\in N_i$ pentru orice $i\in I$, adică $ax+by\in \bigcap_{i\in I} N_i =N$, deci $N\in \mathbf{L_A}(M)$.■

Propoziția 1.6. ne permite să introducem pentru un A-modul M şi o submulțime nevidă M′ a sa, noțiunea de *submodul generat de M′* ca fiind cel mai mic submodul al lui M (față de relația de incluziune), ce conține pe M′. Dacă notăm prin (M′) acest submodul avem în mod evident

$$(M') = \bigcap \{N \in L_A(M) | M' \subseteq N\}.$$

Propoziția 1.7. Dacă M este un A-modul iar $M' \subseteq M$ o submulțime nevidă a sa, atunci $(M')=\{a_1x_1+\ldots+a_nx_n \mid a_1, \ldots, a_n \in A, x_1, \ldots, x_n \in M', n \in \mathbb{N}^*\}$.

Demonstrație. Să notăm prin M′′ mulțimea combinațiilor finite cu elemente din M′ din partea dreaptă a egalității din enunț. Se arată imediat că M′′ este submodul al lui M ce conține pe M′, de unde incluziunea $(M') \subseteq M''$. Dacă alegem $N \in \mathbf{L_A}(M)$ a.î. $M' \subseteq N$ atunci $M'' \subseteq N$ şi cum N este oarecare deducem că $M'' \subseteq \cap N = (M')$, de unde egalitatea $(M')=M''$. ■

Observația 1.8. 1. Dacă $(M')=M$, elementele lui M′ se zic *generatori* pentru M. Dacă M′ este finită, M se zice A- modul *finit generat* sau de *tip finit.*

2. Dacă $M'=\{x\}$ cu $x \in M$, atunci submodulul lui M generat de mulțimea {x} se zice *principal* şi conform propoziției precedente avem:

$$(\{x\})=\{ax \mid a \in A\} \overset{\text{def}}{=} Ax.$$

3. Mulțimea ordonată $(\mathbf{L_A}(M), \subseteq)$ devine în mod canonic latice completă, unde pentru o familie $(N_i)_{i\in I}$ de elemente din $\mathbf{L_A}(M)$ avem $\bigwedge_{i\in I} N_i = \bigcap_{i\in I} N_i$ iar $\bigvee_{i\in I} N_i = (\bigcup_{i\in I} N_i)$; în mod evident această latice este mărginită, unde $\mathbf{0}=\{0\}$ iar $\mathbf{1}=M$.

4. Dacă $N, P \in \mathbf{L_A}(M)$, atunci

$$N \vee P = (N \cup P) = \{x+y \mid x \in N \text{ şi } y \in P\} \overset{\text{def}}{=} N+P,$$

iar $(\{x_1, \ldots, x_n\}) = Ax_1+\ldots+Ax_n$.

Propoziția 1.9. Pentru orice A-modul M, laticea $(\mathbf{L_A}(M), \subseteq)$ este modulară.

Demonstrație. Trebuie să arătăm că dacă P, Q, R$\in$**L_A**(M) şi R$\subseteq$P, atunci $P\wedge(Q\vee R)=(P\wedge Q)\vee R\Leftrightarrow P\cap(Q+R)=(P\cap Q)+R$.

Cum incluziunea $(P\cap Q)+R\subseteq P\cap(Q+R)$ este evidentă, fie $x\in P\cap(Q+R)$. Atunci $x\in P$ şi $x=y+z$ cu $y\in Q$ şi $z\in R$. Cum $R\subseteq P$ deducem că $y=x-z\in P$ şi cum $y\in Q$ avem că $y\in P\cap Q$, adică $x\in(P\cap Q)+R$, deci este adevărată şi incluziunea $P\cap(Q+R)\subseteq(P\cap Q)+R$, de unde egalitatea $P\cap(Q+R)=(P\cap Q)+R$. ■

Observația 1.10. 1. În general, laticea (**L_A**(M), $\subseteq$) poate să nu fie distributivă. Contraexemplul ne este oferit de $\mathbb{Z}$-modulul $M=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ (vezi [2, Exc. 6.16.] şi [19, p. 77]).

2. Laticea submoduleleor $\mathbb{Z}$-modulului $\mathbb{Z}$ (adică laticea idealelor inelului $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$) este distributivă. Într-adevăr, dacă avem trei ideale I, J, K ale inelului $\mathbb{Z}$ atunci $I=m\mathbb{Z}$, $J=n\mathbb{Z}$, $K=p\mathbb{Z}$ cu m, n, $p\in\mathbb{N}$. Se verifică imediat că $I\cap J=[m, n]\mathbb{Z}$ iar $I+J=(m, n)\mathbb{Z}$, astfel că egalitatea $I\cap(J\vee K)=(I\cap J)\vee(I\cap K)$ este echivalentă cu $[m, (n, p)]=([m, n], [m, p])$ iar ultima egalitate este adevărată (vezi [4]).

Definiția 1.11. Fie M un A-modul stâng. Vom spune despre elementele $x_1, \ldots, x_n\in M$ că sunt *liniar independente* peste A dacă având o combinație liniară nulă $a_1x_1+\ldots+a_nx_n= 0$ cu $a_1, \ldots, a_n\in A$, deducem că $a_1=a_2=\ldots=a_n=0$.

Dacă notăm $F=\{x_1, \ldots, x_n\}$ convenim să notăm fapul că elementele lui F sunt liniar independente peste A scriind ind_AF.

Dacă $M'\subseteq M$ este o submulțime oarecare a lui M, vom spune că elementele lui M' sunt *liniar independente* peste A dacă orice submulțime finită $F\subseteq M'$ este formată din elemente liniar independente peste A (vom nota lucrul acesta scriind ind_AM').

În cazul în care elementele $x_1, \ldots, x_n\in M$ nu sunt liniar independente peste A vom spune despre ele că sunt *liniar*

dependente **peste A (acest lucru revenind la a spune că există $a_1, \ldots, a_n \in A$ nu toate nule a.î. $a_1x_1+\ldots+a_nx_n=0$) .**

Exemple. 1. Dacă $n\in\mathbb{N}^*$ şi $M=A^n$ atunci notând cu e_i elementele lui M ce au 1 pe poziţia i şi 0 în rest ($1\le i\le n$) se deduce imediat că elementele $e_1, e_2, .., e_n$ sunt liniar independente peste A.

2. Fie $m, n\in\mathbb{N}^*$ şi $M=\mathbf{M_{m,n}}(A)$ iar E_{ij} matricea de tip (m,n) ce are 1 pe poziţia (i, j) şi 0 în rest ($1\le i\le m$, $1\le j\le n$). Se verifică imediat că elementele $(E_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ sunt liniar independente peste A.

3. Dacă A este comutativ iar $M=\mathbf{A[X]}$, atunci mulţimea infinită $\{1, X, X^2, \ldots.\}$ este formată din polinoame liniar independente peste A.

4. Dacă $n\in\mathbb{N}$ şi $n\ge 2$ atunci orice submulţime nevidă F a $\mathbb{Z}$-modulului $(\mathbb{Z}_n, +)$ este formată din vectori liniar dependenţi peste $\mathbb{Z}$. Într-adevăr, dacă $F=\left\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_p\right\}$ ($p\le n$), atunci

$$n\cdot\hat{x}_1+\ldots+n\cdot\hat{x}_p=\widehat{nx_1}+\ldots+\widehat{nx_p}=\hat{0}+\ldots+\hat{0}=\hat{0}.$$

Definiţia 1.12. Dacă M este un A-modul, o submulţime S a lui M se zice *bază* pentru M dacă (S)=M şi $ind_A S$.

În acest caz, spunem despre A-modulul M că este *liber* (în mod evident $M\ne 0$).

Din cele prezentate anterior deducem că A-modulele A^n şi $M_{m,n}(A)$ (cu m, $n\ge 2$) sunt libere şi au baze finite iar dacă inelul A este comutativ atunci A-modulul A[X] este de asemenea liber, având însă o bază infinită.

Tot din cele prezentate mai înainte deducem că $\mathbb{Z}$-modul $(\mathbb{Z}_n, +)$ ($n\ge 2$) nu este liber.

Teorema 1.13. Fie K un corp arbitrar, V un K-spaţiu vectorial nenul, I, $G\subseteq V$ a.î. $ind_K I$, (G)=V şi $I\subseteq G$. Atunci există o bază $B\subseteq V$ pentru V a.î. $I\subseteq B\subseteq G$.

Demonstraţie. Să remarcăm la început faptul că există submulţimi I şi G ale lui V cu proprietăţile din enunţ. Într-adevăr, putem considera în cel mai nefavorabil caz G=V iar I={x} cu $x\in G$, $x\ne 0$ (căci $V\ne\mathbf{0}$).

Fie F={B⊆V|I⊆B⊆G şi $ind_K B$} (deoarece I∈F deducem că F≠∅). Se verifică imediat că dacă $(B_i)_{i\in I}$ este o familie total ordonată (faţă de incluziune) de elemente din F, atunci $\bigcup_{i\in I} B_i$ ∈F, de unde concluzia că (F, ⊆) este o mulţime inductivă. Conform Lemei lui Zorn există un element maximal B_0∈F. Dacă vom demonstra că $\langle B_0\rangle$=V, cum $ind_K B_0$, vom deduce că B_0 este bază pentru V şi teorema este demonstrată.

Pentru aceasta este suficient să demonstrăm că $G\subseteq\langle B_0\rangle$ (căci atunci am deduce că $V=\langle G\rangle\subseteq\langle B_0\rangle$, de unde $\langle B_0\rangle=V$).

Cum $B_0\subseteq G$, fie $x_0\in G\setminus B_0$. Atunci $I\subseteq B_0\cup\{x_0\}\subseteq G$ iar datorită maximalităţii lui B_0 deducem că vectorii din $B_0\cup\{x_0\}$ trebuie să fie liniar dependenţi peste K. Există deci $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\in K$ nu toţi nuli şi $x_1, \ldots, x_n\in B_0$ a.î. $\lambda_0x_0+\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_nx_n=0$.

Să observăm că $\lambda_0\neq0$ (căci în caz contrar, cum $ind_K B_0$ am deduce că $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$, absurd), de unde deducem că $x_0=\left(-\lambda_0^{-1}\lambda_1\right)x_1+\ldots+\left(-\lambda_0^{-1}\lambda_n\right)x_n$ adică $x_0\in\langle B_0\rangle$. Deducem deci că $G\subseteq\langle B_0\rangle$ şi astfel $\langle B_0\rangle=V$, adică B_0 este o bază pentru V. ■

Ţinând cont de observaţia de la începutul demonstraţiei Teoremei 1.13., deducem imediat următorul rezultat:

Corolar 1.14. (i) Dacă K este un corp oarecare, atunci orice K-spaţiu vectorial nenul admite cel puţin o bază.

(ii) Orice parte I liniar independentă a unui sistem de generatori G al unui K-spaţiu vectorial V poate fi completată cu elemente din G pînă la o bază a lui V.

(iii) Orice sistem de vectori liniar independenţi ai unui spaţiu vectorial poate fi completat pînă la o bază a spaţiului.

Teorema 1.15. (*Teorema schimbului*). Fie K un corp oarecare iar V un K-spaţiu vectorial nenul. Dacă $x_1, \ldots, x_n\in V$ sunt liniar independenţi peste K iar $y_1, \ldots, y_m\in V$ un sistem de generatori pentru V, atunci n≤m şi există o reindexare a vectorilor $y_1, \ldots, y_m$ a.î. $\langle x_1, \ldots, x_n, y_{n+1}, \ldots, y_m\rangle=V$.

Demonstrație. Se face inducție matematică după n. Dacă n=1 atunci în mod evident $1\le m$. Deoarece $(y_1,\dots,y_m)=V$, există $a_1,\dots,a_m\in K$ a.î. $x_1=a_1y_1+\dots+a_my_m$; cum $x_1\ne 0$, există un scalar a_i nenul (să zicem $a_1\ne 0$). Atunci $y_1=a_1^{-1}x_1-\left(a_1^{-1}a_2\right)y_2-\dots-\left(a_1^{-1}a_m\right)y_m$, de unde concluzia că $(x_1, y_2,\dots,y_m)=V$.

Să presupunem afirmația adevărată pentru n-1. Deoarece $x_1,\dots,x_n$ sunt liniar independenți peste K atunci şi $x_1,\dots,x_{n-1}$ sunt liniar independenți peste K şi conform ipotezei de inducție $n-1\le m$ şi există o reindexare a vectorilor $y_1, \dots,y_m$ a.î. $(x_1, \dots, x_{n-1}, y_n , y_{n+1}, \dots, y_m)=V$. Atunci există $b_1, \dots, b_{n-1}, b_n , b_{n+1}, \dots, b_m\in K$ a.î. $x_n=b_1x_1+\dots+b_{n-1}x_{n-1}+$ $+b_ny_n+\dots+b_my_m$. $(\ast)$

Dacă $n-1=m$ atunci $x_n=b_1x_1+\dots+b_{n-1}x_{n-1}$ ceea ce contrazice faptul că vectorii $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ sunt liniar independenți peste K. Atunci $n-1\le m-1$, de unde $n\le m$.

Din $(\ast)$ deducem că există un indice i, $n\le i\le m$ a.î. $b_i\ne 0$ (să zicem i=n). Atunci din $(\ast)$ deducem că

$$y_n=b_n^{-1}x_n-\left(b_n^{-1}b_1\right)x_1-\dots-\left(b_n^{-1}b_{n-1}\right)x_{n-1}-\left(b_n^{-1}b_{n+1}\right)y_{n+1}-\dots-\left(b_n^{-1}b_m\right)y_m$$

ceea ce ne arată că $(x_1, \dots, x_n, y_{n+1}, \dots, y_m)=V$ şi astfel, conform principiului inducției matematice teorema este complet demonstrată.■

Corolar 1.16. Fie K un corp oarecare iar V un K-spațiu vectorial nenul. Atunci oricare două baze finite ale lui V au acelaşi număr de elemente.

Demonstrație. Dacă $B_1=\{x_1, \dots, x_n\}$ şi $B_2=\{y_1, \dots, y_m\}$ sunt două baze ale lui V cu n respectiv m elemente, deoarece în particular $ind_K\{x_1, \dots, x_n\}$ şi $(y_1, \dots, y_m)=V$, conform teoremei schimbului avem $n\le m$. Schimbând rolul lui B_1 cu B_2 deducem că şi $m\le n$, de unde m=n.■

Teorema 1.17. Fie M un A-modul liber iar $(e_i)_{i\in I}$ şi $(f_j)_{j\in J}$ două baze pentru M. Atunci :

(i) I este infinită dacă şi numai dacă J este infinită

(ii) Dacă I şi J sunt infinite, atunci $|I|=|J|$ (unde reamintim că prin $|I|$ am notat cardinalul lui I).

Demonstrație. (i). Pentru fiecare i∈I există $\left(a_j^i\right)_{j\in J}$ de suport finit (cu a_j^i ∈A) a.î. $e_i = \sum_{j\in C_i} a_j^i f_j$, unde C_i=supp$\left(a_j^i\right)_{j\in J} = \left\{j\in J \middle| a_j^i \neq 0\right\}$ (care este mulțime finită).

Să demonstrăm că J=$\bigcup_{i\in I} C_i$ iar pentru aceasta fie j∈J. Deoarece $(e_i)_{i\in I}$ este bază pentru M, există $b_{i_1}, b_{i_2}, ..., b_{i_n} \in$ A a.î. $f_j = b_{i_1} e_{i_1} + ... + b_{i_n} e_{i_n}$. Deducem imediat că :

$$(\ast)\quad f_j = b_{i_1}\left(\sum_{j\in C_{i_1}} a_j^{i_1} f_j\right) + ... + b_{i_n}\left(\sum_{j\in C_{i_n}} a_j^{i_n} f_j\right).$$

Dacă prin absurd, $j \notin \bigcup_{i\in I} C_i$ atunci cu atît mai mult $j \notin \bigcup_{k=1}^{n} C_{i_k}$ şi deci f_j nu se găseşte printre elementele $\left(f_k\right)_{k\in \bigcup_{p=1}^{n} C_{i_p}}$ şi astfel din (∗) deducem că $\left\{f_j\right\} \bigcup \left\{f_k\right\}_{k\in \bigcup_{p=1}^{n} C_{i_p}}$ este o mulțime liniar dependentă, absurd.

Prin urmare $J = \bigcup_{i\in I} C_i$ şi atunci este clar că dacă J este infinită atunci cu necesitate şi I este infinită (deoarece C_i este mulțime finită pentru orice i∈I). Analog deducem că dacă I este infinită atunci şi J este infinită.

(ii). Ținând cont de faptul că $J = \bigcup_{i\in I} C_i$ şi de anumite rezultate elementare din teoria mulțimilor (vezi Capitolul 1, paragraful §10) deducem că $|J| = \left|\bigcup_{i\in I} C_i\right| \leq \sum_{i\in I} |C_i| \leq \chi_0 \cdot |I| = |I|$ şi simetric, $|I| \leq |J|$, de unde $|I| = |J|$.■

Corolar 1.18. Dacă V este un K-spațiu vectorial nenul atunci oricare două baze ale lui V au acelaşi cardinal.

Observația 1.19. Ceva mai tîrziu vom demonstra un rezultat asemănător Corolarului 1.16. şi pentru module (vezi Teorema 2.5.).

Definiția 1.20. Dacă V este un K-spațiu vectorial nenul vom nota cu $\dim_K$V sau [V:K] cardinalul unei baze arbitrare a lui V ce se va numi *dimensiunea lui V peste K.*

Dacă $\dim_K V$ este finită vom spune despre V că este de *dimensiune finită*.

Dacă V={0} convenim ca $\dim_K V=0$.

Din cele expuse mai înainte deducem că dacă K este un corp oarecare atunci $\mathbf{dim}_K K^n=n$, $\mathbf{dim}_K M_{m,n}(K)=mn$, (m, n≥2) iar $\mathbf{dim}_K K[X]$ este infinită.

Dacă pentru $n\in\mathbb{N}$ notăm $K_n[X]=\{f\in K[X] \mid grad(f)\le n\}$, atunci $\mathbf{dim}_K K_n[X]=n+1$ (căci $\{1, X,\dots, X^n\}$ este o bază a lui $K_n[X]$ peste K).

Definiția 1.21. Fie M un A-modul stâng. Un submodul propriu N al lui M se zice *maximal* dacă N este element maximal în laticea $L_A(M)$ a submodulelor lui M (adică pentru orice submodul propriu N′ al lui M a.î. N⊆N′, avem N=N′).

Propoziția 1.22. Pentru un A-modul stâng M şi un submodul propriu N al lui M următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) N este maximal

(ii) N+Ax =M pentru orice $x\in M\setminus N$

(iii) N+N′=M pentru orice submodul N′ al lui M a.î. $N'\not\subseteq N$.

Demonstrație. (i)⇒(ii). Dacă N este maximal, cum $N+Ax=\langle N\cup\{x\}\rangle$ (conform Observației 1.8., 2).) iar $N\neq N+Ax$ deducem imediat că N+Ax=M.

(ii)⇒(iii). Din $N'\not\subseteq N$ deducem că există $x\in N'$ a.î. $x\notin N$. Atunci $N+Ax = \langle N\cup\{x\}\rangle\subseteq\langle N\cup N'\rangle = N+N'$ şi cum N+Ax=M deducem că $M\subseteq N+N'$, adică N+N′=M.

(iii)⇒(i). Presupunem prin absurd că N nu este maximal; atunci există $N'\subseteq M$ submodul propriu a.î. $N\subseteq N'$ şi $N\neq N'$. Cum $N'\not\subseteq N$ ar trebui ca N+N′=M. Însă N+N′=N′ şi astfel ajungem la concluzia falsă că N′=M –absurd!. ∎

Teorema 1.23. Fie M un A-modul stâng finit generat. Atunci orice submodul propriu N al lui M este conținut într-un submodul maximal.

Demonstrație. Fie P_N mulțimea submodulelor proprii ale lui M ce conțin pe N (cum $N \in P_N$ deducem că $P_N \neq \emptyset$). Să arătăm acum că $(P_N, \subseteq)$ este o mulțime inductiv ordonată iar pentru aceasta fie $(N_i)_{i \in I}$ o parte total ordonată a lui P_N. În mod evident $\overline{N} = \bigcup_{i \in I} N_i$ este submodul al lui M ce conține pe N. Dacă $\overline{N}$ nu ar fi propriu (adică $\overline{N}$ =M), cum M este finit generat există un număr finit de generatori $x_1, \ldots, x_n$ ai lui M şi va exista $j \in I$ a.î. $x_1, \ldots, x_n \in N_j$ de unde ar rezulta că $N_j = M$, absurd!. Deci $\overline{N} \in P_N$ şi este un majorant pentru $(N_i)_{i \in I}$. Conform Lemei lui Zorn, P_N conține un element maximal N_0; deducem imediat că N_0 este submodul maximal al lui M ce conține pe N.■

Definiția 1.24. Un A-modul stâng M se zice *simplu* dacă M≠0 şi singurul său submodul propriu este submodulul nul 0.

Dacă M este un A-modul stâng şi N este un submodul al său ce ca A-modul este simplu, atunci N se zice *submodul minimal*.

Observația 1.25. Dacă M≠**0** este un A-modul stâng simplu, atunci există $x \in M$, $x \neq 0$ a.î. M=Ax.

Fie acum M un A-modul stâng şi $N \subseteq M$ un submodul al său. Deoarece grupul (M, +) este abelian deducem că $N \trianglelefteq M$ şi deci putem vorbi de grupul aditiv factor M/N (vezi Capitolul 2, §.4).

Reamintim că $M/N = \{x+N \mid x \in M\}$, unde $x+N = \{x+y \mid y \in N\}$ iar operația de adunare pe M/N se defineşte astfel:

$$(x+N)+(y+N)=(x+y)+N, \text{ oricare ar fi } x, y \in M.$$

În continuare să-l organizăm pe M/N ca A-modul. Pentru $a \in A$

şi $x \in M$ definim:

$$a(x+N)=ax+N \in M/N.$$

Dacă mai avem $y \in M$ a.î. $x+N=y+N$, atunci $x-y \in N$ şi deci $a(x-y) \in N$, de unde concluzia că $ax+N=ay+N$, adică operația definită mai sus este corectă.

Se verifică imediat că în felul acesta M/N devine A-modul stâng care poartă numele de *modulul factor* al lui M prin submodulul N. Spunem de multe ori că am *factorizat* modulul M prin submodulul său N.

Dacă $N=\mathbf{0}$ atunci $M/N=\{x+0 \mid x \in M\}=\{x \mid x \in M\}=M$ iar dacă $N=M$, atunci $M/M=\{x+M \mid x \in M\}=\{M\}$ iar cum N este elementul neutru al grupului aditiv (M/N, +) convenim să spunem că M/M este A-modulul nul (notat de obicei prin $\mathbf{0}$). Astfel, $M/N \neq \mathbf{0}$ dacă şi numai dacă N este submodul propriu al lui M (adică $N \neq M$).

Observația 1.26. Aplicația $p_N: M \to M/N$, $p_N(x)=x+N$, oricare ar fi $x \in M$ poartă numele de *surjecția canonică*; când nu este pericol de confuzie în loc de p_N vom scrie simplu p iar pentru $x \in M$ folosim deseori notația $p(x)=\hat{x}$.

§2. Morfisme de module. Endomorfisme. Operații cu morfisme de module. Imaginea, nucleul, coimaginea şi conucleul unui morfism de module. Categoriile $Mod_s(A)$ şi $Mod_d(A)$. Monomorfisme, epimorfisme, izomorfisme de module. Nucleul şi conucleul unei perechi de morfisme. Teorema fundamentală de izomorfism pentru module. Consecințe. Şiruri exacte de A-module. Functorii h^M şi h_M de la $Mod_s(A)$ la Ab. Bimodule. Dualul şi bidualul unui modul.

Definiția 2.1. Fie M şi N două A-module stângi. O funcție $f:M\to N$ se zice *morfism de A-module* (stângi) dacă

(i) $f(x+y)=f(x)+f(y)$

(ii) $f(ax)=af(x)$, oricare ar fi $x, y\in M$ şi $a\in A$.

Dacă M şi N sunt A-module drepte atunci (ii) se înlocuieşte cu (ii′) $f(xa)=f(x)a$, oricare ar fi $x\in M$ şi $a\in A$.

Morfismele de A-module se mai zic şi *aplicații liniare* (sau *aplicații A-liniare,* dacă este pericol de confuzie).

În continuare ne vom ocupa doar de morfismele de A-module stângi.

Observația 2.2. 1. Se verifică imediat că dacă M şi N sunt două A-module stângi, atunci $f:M\to N$ este morfism de A-module dacă şi numai dacă $f(ax+by)=af(x)+bf(y)$, oricare ar fi $x, y\in M$ şi $a, b\in A$.

Deoarece în particular f este morfism de grupuri aditive deducem că $f(0)=0$ şi $f(-x)=-f(x)$, oricare ar fi $x\in M$.

2. Un morfism de A-module $f:M\to M$ se zice *endomorfism* al lui M; în particular $1_M:M\to M$, $1_M(x)=x$, oricare ar fi $x\in M$ este endomorfism al lui M (numit *endomorfismul identic al lui M*).

3. Dacă M este un A-modul stâng iar N este un submodul al său, se verifică imediat că surjecția canonică $p_N:M\to M/N$, $p_N(x)=x+N$, oricare ar fi $x\in M$ este morfism de A-module şi în consecință p_N se va numi *morfismul surjectiv canonic*. De asemenea *funcția incluziune* $i_{N,M}:N\to M$, $i_{N,M}(x)=x$, oricare ar fi $x\in N$ este morfism de module.

4. Dacă M şi N sunt două A-module stângi, atunci funcţia $\mathbf{0}:M\to N$, $\mathbf{0}(x)=0$, oricare ar fi $x\in M$ este morfism de module numit *morfismul nul*.

5. Dacă **0** este un A-modul nul şi M un A-modul arbitrar, atunci morfismul nul este singurul morfism de module de la **0** la M ca şi de la M la **0**.

Pentru două A-module stângi M şi N vom nota

$$\mathbf{Hom}_A(M, N)=\{f:M\to N \mid f \text{ este morfism de A-module}\}$$

iar pentru $f, g\in \mathbf{Hom}_A(M, N)$ definim

$$f+g:M\to N \text{ prin } (f+g)(x)=f(x)+g(x), \text{ oricare ar fi } x\in M.$$

Propoziţia 2.3. ($\mathbf{Hom}_A(M, N)$, +) este grup abelian.

Demonstraţie. Se verifică imediat că adunarea morfismelor este asociativă, comutativă şi admite morfismul nul $\mathbf{0}:M\to N$ ca element neutru. Pentru $f\in \mathbf{Hom}_A(M, N)$, fie $-f:M\to N$ dată prin $(-f)(x)=-f(x)$, oricare ar fi $x\in M$. Deoarece pentru orice $x, y\in M$ şi $a, b\in A$ avem $(-f)(ax+by)=-f(ax+by)=-(af(x)+bf(y))=-af(x)-bf(y)=a(-f(x))+b(-f(y))$ deducem că $-f\in \mathbf{Hom}_A(M, N)$ şi cum $f+(-f)=(-f)+f=\mathbf{0}$ rezultă că $-f$ este opusul lui f în $\mathbf{Hom}_A(M, N)$. ■

Propoziţia 2.4. Fie M, N, P trei A-module stângi şi $f\in \mathbf{Hom}_A(M, N)$, $g\in \mathbf{Hom}_A(N, P)$. Atunci $g\circ f\in \mathbf{Hom}_A(M, P)$.

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă $x, y\in M$ şi $a, b\in A$ atunci $(g\circ f)(ax+by)=g(f(ax+by))=g(af(x)+bf(y))=ag(f(x))+bg(f(y))=a(g\circ f)(x)+$ $+b(g\circ f)(y)$, de unde concluzia că $g\circ f\in \mathbf{Hom}_A(M, P)$.■

Propoziţia 2.5. Fie M, N două A-module stângi şi $f\in \mathbf{Hom}_A(M, N)$. Atunci:

(i) $M'\in L_A(M)\Rightarrow f(M')\in L_A(N)$

(ii) $N'\in L_A(N)\Rightarrow f^{-1}(N')\in L_A(M)$.

Demonstraţie. (i). Ţinem cont de Propoziţia 1.5. iar pentru aceasta fie $x'=f(x)$, $y'=f(y)$ din $f(M')$ (cu $x, y\in M'$) şi $a, b\in A$. Deoarece

$ax'+ay'=af(x)+bf(y)=f(ax+by)\in f(M')$ (căci $ax+by\in M'$) deducem că $f(M')\in \mathbf{L_A}(N)$.

(ii). se probează analog cu (i). ■

Propoziția 2.5. ne permite să dăm următoarea definiție:

Definiția 2.6. Fie M, N două A-module stângi iar $f\in \mathbf{Hom}_A(M, N)$. Prin:

i) ***Imaginea lui f*** **(notată Im(f)) înțelegem Im(f)=f(M)**

ii) ***Nucleul lui f*** **(notat Ker(f)) înțelegem**

$$\mathbf{Ker(f)=f^{-1}(0)=\{x\in M | f(x)=0\}}$$

iii) ***Coimaginea lui f*** **(notată Coim(f)) înțelegem**

$$\mathbf{Coim(f)=N/Im(f).}$$

iv) ***Conucleul lui f*** **(notat Coker(f)) înțelegem**

$$\mathbf{Coker(f)=M/Ker(f)).}$$

Din cele expuse mai sus deducem că modulele la stânga (dreapta) peste un inel A formează o categorie pe care o vom nota prin $\mathbf{Mod_s(A)}$ ($\mathbf{Mod_d(A)}$) în care obiectele sunt A-modulele la stânga (dreapta), morfismele sunt morfismele de A-module stângi (drepte) iar compunerea este compunerea obişnuită a funcțiilor.

Pentru anumite chestiuni legate de categorii (definiții, rezultate de bază, etc) recomandăm cititorilor §5.

În continuare vom caracteriza monomorfismele, epimorfismele şi izomorfismele în $\mathbf{Mod_s(A)}$.

Teorema 2.7. În categoria $\mathbf{Mod_s(A)}$

(i) monomorfismele coincid cu morfismele injective

(ii) epimorfismele coincid cu morfismele surjective

(iii) izomorfismele coincid cu morfismele bijective .

Demonstrație. Fie M, N două A-module şi $f\in \mathbf{Hom}_A(M, N)$.

(i). Să presupunem la început că f este ca funcție o injecție şi să demonstrăm că f este atunci monomorfism în $\mathbf{Mod_s(A)}$ iar pentru aceasta să mai alegem P un A-modul stâng şi $g, h\in \mathbf{Hom}_A(P, M)$ a.î. $f\circ g=f\circ h$. Atunci $f(g(x))=f(h(x))$, oricare ar fi $x\in P$ şi cum f este injecție deducem că $g(x)=h(x)$, oricare ar fi $x \in P$, adică $g=h$ şi deci f este monomorfism în categoria $\mathbf{Mod_s(A)}$.

Reciproc, să presupunem că f este monomorfism în $\mathbf{Mod_s(A)}$ şi să demonstrăm că f ca funcţie este injecţie. Dacă prin absurd f nu este injecţie, atunci cum f este în particular morfism de grupuri aditive deducem că $Ker(f) \neq 0$. Alegând $P=Ker(f)$ şi $g, h:P \to M$, $g=\mathbf{0}$ (morfismul nul) iar $h=i_{P,M}$ (morfismul incluziune de la P la M) avem în mod evident $f \circ g = f \circ h = \mathbf{0}$ şi cum $P \neq \mathbf{0}$, $g \neq h$ -absurd (căci am presupus că f este monomorfism).

(ii). Să presupunem că f este ca funcţie o surjecţie şi să demonstrăm că f este epimorfism în $\mathbf{Mod_s(A)}$. Pentru aceasta mai alegem P un alt A-modul stâng şi $g, h \in \mathbf{Hom}_A(N, P)$ a.î. $g \circ f = h \circ f$. Dacă avem $y \in N$, cum f este surjecţie putem scrie $y=f(x)$ cu $x \in M$ şi din $g \circ f = h \circ f$ deducem că $g(f(x))=h(f(x)) \Leftrightarrow g(y)=h(y)$, de unde $g=h$, adică f este epimorfism în categoria $\mathbf{Mod_s(A)}$.

Reciproc, să presupunem că f este epimorfism în $\mathbf{Mod_s(A)}$ şi să demonstrăm că f ca funcţie este surjecţie. Dacă prin absurd f nu este surjecţie, atunci $Im(f)=f(M) \neq N$ şi alegând $P=N/Im(f)=Coim(f)$ avem că $P \neq \mathbf{0}$. Considerând morfismele $g, h:N \to P$, g=morfismul nul iar $h=p_{Im(f)}$ avem că $g \neq h$ (căci $P \neq \mathbf{0}$) iar $g \circ f = h \circ f = \mathbf{0}$ -absurd (căci am presupus că f este epimorfism).

(iii). Deoarece izomorfismele sunt în particular monomorfisme şi epimorfisme, dacă f este izomorfism în $\mathbf{Mod_s(A)}$, atunci f este cu necesitate injecţie şi surjecţie deci bijecţie.

Reciproc, dacă f ar fi bijecţie, atunci se probează imediat că $g=f^{-1} : N \to M$ este morfism de A-module stângi şi cum $g \circ f = 1_M$ iar $f \circ g = 1_N$ deducem că f este izomorfism în $\mathbf{Mod_s(A)}$. ■

Observaţia 2.8. Dacă $f:M \to N$ este un izomorfism de A-module stângi vom spune despre M şi N că sunt *izomorfe* şi vom scrie $M \approx N$.

Un endomorfism al lui M ce este izomorfism se zice *automorfism* al lui M. Notăm prin **End**(M) (respectiv **Aut**(M)) mulţimea endomorfismelor (automorfismelor) lui M. Se verifică imediat prin calcul că (**End**(M), +, $\circ$) este inel numit *inelul endomorfismelor* lui M (unde a doua lege de compoziţie este compunerea endomorfismelor !).

Teorema 2.9. Categoria $\mathbf{Mod}_s(A)$ este o categorie cu nuclee şi conuclee de săgeată dublă.

Demonstraţie. Fie M, N două A-module stângi şi $f, g \in \mathbf{Hom}_A(M, N)$.

Alegem $K=\{x\in M \mid f(x)=g(x)\}$ şi $i_{K,M}:K\to M$ incluziunea. Se probează imediat că dacă $x, y\in K$ şi $a, b\in A$ atunci $ax+by\in K$, adică K este submodul al lui M.

Să demonstrăm acum că dubletul $(K, i)=Ker(f, g)$. Condiţia $f\circ i_{K,M}=g\circ i_{K,M}$ se verifică din felul în care am definit pe K. Dacă mai avem K' un alt A-modul stâng şi $i':K'\to M$ un morfism de A-module stângi a.î. $f\circ i'=g\circ i'$, atunci $f(i'(x))=g(i'(x))$, oricare ar fi $x\in K'$, adică $i'(x)\in K$. Se probează imediat că $u:K'\to K$ definit prin $u(x)=i'(x)$, oricare ar fi $x\in K'$, este unicul morfism de A-module cu proprietatea că $i_{K,M}\circ u=i'$, de unde deducem că într-adevăr $(K, i)=Ker(f, g)$.

Pentru cazul conucleului perechii (f, g), fie $h=f-g\in \mathbf{Hom}_A(M, N)$, $P=N/Im(f-g)$ şi $p:N\to P$ epimorfismul canonic. Să demonstrăm la început că $p\circ f=p\circ g$, iar pentru aceasta fie $x\in M$. Atunci $p(f(x))=p(g(x)) \Leftrightarrow f(x)-g(x)\in Im(f-g)$, ceea ce este adevărat.

Fie acum N' un alt A-modul stâng şi $p':N\to N'$ un alt morfism de A-module a.î. $p'\circ f=p'\circ g$. Definim $v:P\to N'$ prin $v(x+Im(f-g))=p'(x)$, oricare ar fi $x\in N$. Dacă $x, y\in N$ şi $x+Im(f-g)=y+Im(f-g)$, atunci $x-y\in Im(f-g)$, adică $x-y=(f-g)(z)$ cu $z\in M$. Deducem că $p'(x-y)= =p'((f-g)(z))=p'(f(z)-g(z))=p'(f(z))-p'(g(z))=0$ (deoarece $p'\circ f=p'\circ g$), adică v este corect definită. Se verifică acum imediat că v este unicul morfism de A-module cu proprietatea că $v\circ p=p'$, de unde concluzia că $(P, p)=Coker(f, g)$. ∎

Observaţia 2.10. Ţinând cont de teorema de mai înainte şi de Definiţia 2.6. deducem că dacă $f\in \mathbf{Hom}_A(M, N)$, atunci $Ker(f)= =Ker(f, \mathbf{0})$ iar $Coker(f)=Coker(f, \mathbf{0})$.

În continuare vom prezenta anumite rezultate cunoscute sub numele de *teoremele de izomorfism pentru module* (asemănătoare cu teoremele de izomorfism pentru grupuri şi inele; vezi Capitolele 2, 3).

Teorema 2.11. (*Teorema fundamentală de izomorfism*). Dacă M şi N sunt două A-module iar $f\in Hom_A(M, N)$, atunci $M/Ker(f)\approx Im(f)$.

Demonstrație. Definim $g: M/Ker(f)\to Im(f)$ prin $g(x+Ker(f))=f(x)$, oricare ar fi $x\in M$. Dacă $x, y\in M$ şi $x+Ker(f)=y+Ker(f)$, atunci $x-y\in Ker(f)$, deci $f(x)=f(y)$, adică g este corect definită. Se verifică imediat că g este morfism bijectiv de A-module, de unde concluzia din enunț. ■

Corolar 2.12. Dacă $f\in Hom_A(M, N)$ este surjecție atunci $M/Ker(f)\approx N$.

Corolar 2.13. (*Noether*) Dacă N şi P sunt două submodule ale modulului M, atunci $(N+P)/N\approx P/(P\cap N)$.

Demonstrație. Fie $f:P\to(N+P)/N$, $f(x)=x+N$, oricare ar fi $x\in P$. Se verifică imediat că f este morfism surjectiv de A-module iar $Ker(f)=P\cap N$. Conform Corolarului 2.12.,

$$P/Ker(f)\approx(N+P)/N\Leftrightarrow P/P\cap N\approx(N+P)/N.$$■

Corolar 2.14. (*Noether*) Dacă N şi P sunt două submodule ale modulului M a.î. $N\subseteq P$ atunci $(M/N)/(P/N)\approx M/P$.

Demonstrație. Fie $f:M/N\to M/P$, $f(x+N)=x+P$, oricare ar fi $x\in M$. Dacă mai avem $y\in M$, din $x+N=y+N \Rightarrow x-y\in N\subseteq P \Rightarrow x-y\in P \Rightarrow$ $\Rightarrow x+P=y+P$, deci f este corect definită. Se probează imediat că f este morfism surjectiv de A-module iar $Ker(f)=P/N$, astfel că totul rezultă din Corolarul 2.12. ■

Observația 2.15. 1. În anumite cărți de matematică, Corolarele 2.13. şi 2.14. sunt numite alături de Teorema fundamentală de izomorfism 2.11. ca fiind „*teoremele de izomorfism pentru module*”.

2. Teorema 2.11. se mai poate formula şi astfel:

Dacă M şi N sunt două A-module, atunci există un unic izomorfism de A-module $u:Coim(f)=M/Ker(f)\to Im(f)$ a.î. diagrama de mai jos să fie comutativă, adică $f = i_{Im(f),N}\circ u\circ p_{Ker(f)}$ (unde reamintim că $p_{Ker(f)}$ este epimorfismul canonic iar $i_{Im(f), N}$ este morfismul incluziune de la Im(f) la N).

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_{Ker(f)}"'] & N \\ Coim(f) \arrow[r, "u"'] & Im(f) \arrow[u, "i_{Im(f),N}"'] \end{tikzcd}$$

Fie M, N două A-module, $f:M\to N$ un morfism de A-module, $X=(x_i)_{i\in I}\subseteq M$ şi $Y=(y_i)_{i\in I}\subseteq N$ a.î. $f(x_i)=y_i$ pentru orice $i\in I$.

Propoziția 2.16. (i) Dacă $ind_A X$ şi f este monomorfism, atunci $ind_A Y$

(ii) Dacă $ind_A Y$, atunci $ind_A X$
(iii) Dacă M=(X) şi f este epimorfism, atunci N=(Y)
(iv) Dacă N=(Y), atunci f este epimorfism
(v) Dacă f este izomorfism, atunci X este bază a lui M dacă şi numai dacă Y este bază a lui N.

Demonstrație. (i). Fie $I'\subseteq I$ finită a.î. $\sum_{i\in I'} a_i y_i = 0$ cu $a_i\in A$, pentru $i\in I'$. Atunci $f\left(\sum_{i\in I'} a_i x_i\right) = \sum_{i\in I'} a_i f(x_i) = \sum_{i\in I'} a_i y_i = 0$ şi cum f este ca funcție o injecție deducem că $\sum_{i\in I'} a_i x_i = 0$. Cum $ind_A X$ deducem că $a_i=0$ pentru orice $i\in I'$, adică $ind_A Y$.

(ii). Analog ca la (i).

(iii). Fie $y\in N$. Cum f este epimorfism, există $x\in M$ a.î. $f(x)=y$. Deoarece M=(X), există $I'\subseteq I$ finită a.î. $x=\sum_{i\in I'} a_i x_i$ cu $a_i\in A$, pentru $i\in I'$. Atunci $y=f(x)=\sum_{i\in I'} a_i f(x_i) = \sum_{i\in I'} a_i y_i$, de unde concluzia că N=(Y).

(iv). Dacă $y\in N$, atunci cum $N=(Y)$ există $I'\subseteq I$ finită a.î. $y=\sum_{i\in I'} a_i y_i$ cu $a_i\in A$. Cum $y_i=f(x_i)$ obținem că $y=f\left(\sum_{i\in I'} a_i x_i\right)$, adică f este surjecție.

(v). Rezultă imediat din (i)-(iv). ■

Corolar 2.17. Un A-modul izomorf cu un A-modul liber este liber.

Demonstrație. Fie M şi N două A-module izomorfe, cu M liber. Deci există $f:M\to N$ un izomorfism de A-module, astfel că dacă $X\subseteq M$, $X=(x_i)_{i\in I}$ este o bază a lui M , $Y=(f(x_i))_{i\in I}$ este o bază a lui N (conform Propoziției 2.16.). ■

Corolar 2.18. Fie M un A-modul iar $L\subseteq M$ un submodul al său. Atunci:

(i) Dacă M este finit generat atunci şi M/L este finit generat

(ii) Dacă L şi M/L sunt finit generate rezultă că şi M este finit generat.

Demonstrație. (i). Dacă considerăm epimorfismuul canonic p: $M\to M/L$, totul rezultă din Propoziția 2.16., (iii).

(ii). Să presupunem că $(\{e_1,\ldots,e_n\})=L$ şi $(\{\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_m\})=M/L$ (unde $x_1,\ldots,x_m\in M$ iar pentru $x\in M$ am notat $\overline{x}=p(x)$).

Dacă $x\in M$, atunci există $a_1,\ldots,a_m\in A$ a.î. $\overline{x}=a_1\overline{x}_1+\ldots+a_m\overline{x}_m \Rightarrow$ $x-(a_1x_1+\ldots+a_mx_m)\in L$ astfel că există $b_1,\ldots,b_n\in A$ a.î. $x=a_1x_1+\ldots+a_mx_m+$ $+b_1e_1+\ldots+b_ne_n$, de unde concluzia că $M=(\{x_1,\ldots,x_m,e_1,\ldots,e_n\})$. ■

Teorema 2.19. (*Proprietatea de universalitate a modulelor libere*).

Fie M un A-modul liber de bază $X=(e_i)_{i\in I}\subseteq M$. Pentru orice A-modul N şi orice familie $Y=(y_i)_{i\in I}$ de elemente din N există un unic morfism $f\in Hom_A(M, N)$ a.î. $f(e_i)=y_i$ pentru orice $i\in I$ (altfel zis, orice funcție $f:X\to N$ se extinde în mod unic la un morfism de A-module $f':M\to N$).

Demonstrație. Dacă $x \in M$, atunci $x = \sum_{i \in I} a_i e_i$, unde $a_i \in A$ sunt unic determinați şi aproape toți nuli. Definim $f: M \to N$ prin $f(x) \overset{def}{=} \sum_{i \in I} a_i y_i$ şi se verifică imediat că $f \in \mathbf{Hom}_A(M, N)$ iar $f(e_i) = y_i$ pentru orice $i \in I$. Dacă mai avem $g \in \mathbf{Hom}_A(M, N)$ a.î. $g(e_i) = y_i$ pentru orice $i \in I$, atunci pentru orice $x \in M$, $x = \sum_{i \in I} a_i e_i$ avem $g(x) = \sum_{i \in I} a_i g(e_i) = \sum_{i \in I} a_i f(e_i) = f(x)$, de unde $g = f$. ■

Teorema 2.20. (***a defectului***) **Fie V şi W două K-spații vectoriale de dimensiuni finite iar $f \in \mathbf{Hom}_K(V, W)$. Atunci:**

$$\dim_K \mathrm{Ker}(f) + \dim_K \mathrm{Im}(f) = \dim_K V.$$

Demonstrație. Fie $(v_i)_{1 \le i \le n}$ bază pentru Ker(f) iar $(w_j)_{1 \le j \le m}$ bază pentru Im(f). Alegem $(v_j')_{1 \le i \le m} \subset V$ a.î. $f(v_j') = w_j$ pentru orice $1 \le j \le m$.

Vom demonstra că $B = \{v_1, \dots, v_n, v_1', \dots, v_m'\}$ este o bază pentru V şi astfel teorema va fi demonstrată.

Să arătăm la început $\mathrm{ind}_K B$ iar pentru aceasta fie $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in K$ a.î. $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_1 v_1' + \dots + \beta_m v_m' = 0$. Deducem că $\alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_n f(v_n) + \beta_1 f(v_1') + \dots + \beta_m f(v_m') = 0$ sau $\beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m = 0$, de unde $\beta_1 = \dots = \beta_m = 0$.

Atunci $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$, de unde şi $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Pentru a arăta că B este şi sistem de generatori pentru V (adică (B)=V), fie $x \in V$. Atunci $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ şi deci există $\beta_1, \dots, \beta_m \in K$ a.î. $f(x) = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m = \beta_1 f(v_1') + \dots + \beta_m f(v_m') = f(\beta_1 v_1' + \dots + \beta_m v_m')$, de unde concluzia că $x - (\beta_1 v_1' + \dots + \beta_m v_m') \in \mathrm{Ker}(f)$, adică există $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ a.î. $x - (\beta_1 v_1' + \dots + \beta_m v_m') = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \Leftrightarrow x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_1 v_1' + \dots + \beta_m v_m'$.
■

Corolar 2.21. Fie V un K spațiu vectorial de dimensiune finită iar $V' \subset V$ un subspațiu al lui V. Atunci $\dim_K V = \dim_K V' + \dim_K (V/V')$.

Demonstrație. Dacă $p:V\to W=V/V'$ este epimorfismul canonic, atunci $Ker(p)=V'$, $Im(p)=V/V'$ şi totul rezultă din Teorema 2.20. ■

Fie M un A-modul şi $x\in M$. Notăm $Ann_A(x)=\{a\in A \mid ax=0\}$.

Propoziția 2.22. Pentru orice $x\in M$, $Ann_A(x)\subset A$ este ideal la stânga al lui A.

Demonstrație. Dacă a, $b\in Ann_A(x)$, atunci $ax=bx=0$ şi cum $(a-b)x=ax-bx=0$ deducem că $a-b\in Ann_A(x)$. Dacă $a\in Ann_A(x)$ şi $c\in A$ atunci $ax=0$ deci şi $(ca)x=0$, adică $ca\in Ann_A(x)$, de unde concluzia cerută. ■

Corolar 2.23. Dacă notăm $Ann_A(M)=\bigcap_{x\in M} Ann_A(x)$, **atunci $Ann_A(M)$ este ideal bilateral al lui A.**

Demonstrație. Cum $Ann_A(M)$ este intersecție de ideale la stânga ale lui A deducem că $Ann_A(M)$ este ideal la stânga al lui A. Dacă $a\in Ann_A(M)$ şi $c\in A$, atunci $(ac)M=a(cM)\subseteq aM=0$, adică $ac\in Ann_A(M)$ şi deci $Ann_A(M)$ este şi ideal la dreapta, adică este bilateral. ■

Să considerăm M un A-modul, $I\subseteq A$, un ideal bilateral a.î. $I\subseteq Ann_A(M)$ şi $\overline{A}=A/I$. Pentru $a\in A$ notăm $\overline{a}=a+I$.

Lema 2.24. Aplicația $\varphi:\overline{A}\times M\to M$, $\varphi(\overline{a}, x)=ax$ este corect definită şi conferă grupului abelian subiacent A-modulului M o structură de $\overline{A}$-modul. Mai mult, submodulele lui M ca $\overline{A}$-modul coincid cu submodulele lui M ca A-modul.

Demonstrație. Dacă a, $b\in A$ a.î. $\overline{a}=\overline{b}$, atunci $a-b\in I\subseteq Ann_A(M)$, deci $(a-b)x=0$ pentru orice $x\in M$, adică $ax=bx$, şi deci φ este corect definită. Restul afirmațiilor se probează imediat. ■

Teorema 2.25. Fie A un inel comutativ unitar cu $0\neq 1$ şi L un A-modul liber ce admite o bază finită. Atunci toate bazele lui L sunt finite şi admit acelaşi număr de elemente.

Demonstrație. Fie $\mathcal{m}$ un ideal maximal (vezi Capitolul 3, §10) iar $\mathcal{m}L$ mulțimea combinațiilor liniare finite ale elementelor din L cu scalari din $\mathcal{m}$ (adică $\mathcal{m}L=\{a_1x_1+\ldots+a_nx_n \mid a_1,\ldots,a_n\in\mathcal{m}$ şi $x_1,\ldots,x_n\in L\}$).

Se deduce imediat că $\mathcal{m}L$ este un A-submodul al lui L şi fie $V=L/\mathcal{m}L$. Cum $K=A/\mathcal{m}$ este corp (vezi Capitolul 3, §10) şi $\mathcal{m}\subseteq Ann_A(V)$, ținând cont de Lema 2.24., deducem că V devine în mod canonic K-spațiu vectorial. Vom nota pentru $a\in A$ prin $\overline{a}$ imaginea lui a prin epimorfismul canonic $A\to A/\mathcal{m}L=K$ iar prin $p:L\to V=L/\mathcal{m}L$ celălalt epimorfism canonic.

Fie $B=\{e_1,\ldots,e_n\}\subseteq L$ o bază finită a lui L (ce există conform enunțului).

Este suficient să demonstrăm că $p(B)=\{p(e_1),\ldots,p(e_n)\}$ este o bază a lui V ca spațiu vectorial peste K (vezi Corolarul 1.18.).

Cum p este epimorfism, conform Propoziției 2.16., deducem că p(B) este un sistem de generatori ai lui V.

Mai avem de demonstrat $ind_K p(B)$ iar pentru aceasta fie $\overline{a}_1,...,\overline{a}_n\in K$ $(a_1,\ldots,a_n\in A)$ a.î. $\overline{a}_1 p(e_1)+...+\overline{a}_n p(e_n)=p(0)$. Obținem că $a_1p(e_1)+\ldots+a_np(e_n)=p(0)\Leftrightarrow p(a_1e_1+\ldots+a_ne_n)=p(0)$, adică $a_1e_1+\ldots+a_ne_n\in\mathcal{m}L$, deci există $m_1,\ldots,m_n\in\mathcal{m}$ a.î. $\sum_{i\in I}a_ie_i=\sum_{i\in I}m_ie_i$, de unde deducem că $a_i=m_i\in\mathcal{m}$, $1\le i\le n$, deci $\overline{a}_i=\overline{0}$, $1\le i\le n$, adică $ind_K p(B)$. ■

Definiția 2.26. Spunem că un A-modul liber L este de *rang finit* dacă admite o bază finită şi are proprietatea de invarianță a numărului elementelor bazei, număr ce se notează prin $rang_A L$.

Conform Teoremei 2.25., dacă A este inel unitar comutativ cu 0≠1, atunci orice A-modul liber ce admite o bază finită se bucură de proprietatea de invarianță a numărului de elemente din acea bază.

Definiția 2.27. Un şir de morfisme şi A-module (finit sau infinit):

(1) $$M_1\xrightarrow{f_1}M_2\xrightarrow{f_2}\ldots\xrightarrow{f_{i-1}}M_i\xrightarrow{f_i}\ldots\xrightarrow{f_{n-1}}M_n\ldots.$$

se numeşte *şir exact de module* dacă $\mathrm{Im}(f_{i-1})=\mathrm{Ker}(f_i)$ pentru orice $i\geq 2$ în cazul în care şirul (1) este infinit şi pentru orice $2\leq i\leq n$ în cazul în care şirul (1) este finit şi de lungime n ($n\geq 2$).

Spunem că şirul (1) este *exact în M_i* dacă $\mathrm{Im}(f_{i-1})=\mathrm{Ker}(f_i)$ ($1 < i < n$).

Să observăm că dacă M şi N sunt două A-module stângi iar $f\in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ atunci

i) Şirul $0\longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ este exact $\Leftrightarrow$ f este monomorfism

ii) Şirul $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ este exact $\Leftrightarrow$ f este epimorfism

iii) Şirul $0\longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ este exact $\Leftrightarrow$ f este izomorfism.

Un şir exact de A-module $0\longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ se *numeşte şir exact scurt* sau o *extensie a lui M' prin M''*.

Exemple. 1. Dacă $f\in$ **Hom**$_A$(M, N) atunci şirul:

$$0\longrightarrow Ker(f) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{p} Co\ker(f) \longrightarrow 0$$

unde i=incluziunea iar p=epimorfismul canonic este un şir exact.

2. Dacă M este un A-modul iar $N\subseteq M$ un submodul al său, atunci şirul:

$$0\longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M/N \longrightarrow 0$$

unde i=incluziunea iar p=epimorfismul canonic este exemplul clasic de şir exact scurt.

Propoziția 2.28. (*Lema celor cinci morfisme*).
În $Mod_s(A)$ considerăm diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"'] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"'] & M_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"'] & M_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "h_4"'] & M_5 \arrow[d, "h_5"'] \\
N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3 \arrow[r, "g_3"] & N_4 \arrow[r, "g_4"] & N_5
\end{tikzcd}$$

cu liniile şiruri exacte.

Dacă

(i) Coker(h_1)=0, Ker(h_2)=0, Ker(h_4)=0, atunci Ker(h_3)=0

(ii) Coker(h_2)=0, Coker(h_4)=0, Ker(h_5)=0, atunci Coker(h_3)=0.

Demonstrație. (i). Fie $x \in M_3$ a.î. $h_3(x)=0$ şi să demonstrăm că $x=0$. Avem că $(g_3 \circ h_3)(x)=g_3(h_3(x))=g_3(0)=0$ şi cum $h_4 \circ f_3=g_3 \circ h_3 \Rightarrow h_4(f_3(x))=0 \Rightarrow f_3(x) \in Ker(h_4)=\mathbf{0} \Rightarrow f_3(x)=0 \Rightarrow x \in Ker(f_3)= =Im(f_2) \Rightarrow x=f_2(x')$ cu $x' \in M_2$. Cum $g_2 \circ h_2=h_3 \circ f_2 \Rightarrow g_2(h_2(x'))= =h_3(f_2(x'))=h_3(x)=0 \Rightarrow h_2(x') \in Ker(g_2)=Im(g_1)$, deci $h_2(x')=g_1(y)$ cu $y \in N_1$. Cum h_1 este surjecție (căci Coker(h_1)=**0**), $y=h_1(x'')$ cu $x'' \in M_1$. Astfel, $h_2(x')=g_1(h_1(x''))=h_2(f_1(x''))$, de unde $x'=f_1(x'')$. Dar atunci $x=f_2(x')=f_2(f_1(x''))=0$, de unde $x=0$.

Analog se verifică şi (ii).■

Lema 2.29. În $Mod_s(A)$ considerăm diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & N \arrow[d, "v"] \\ M' \arrow[r, "f'"] & N' \end{tikzcd}$$

Atunci există şi sunt unice morfismele u' şi v' a.î. diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Ker(f) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "u'"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & N \arrow[r, "p"] \arrow[d, "v"] & Co\ker(f) \arrow[r] \arrow[d, "v'"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Ker(f') \arrow[r, "i'"] & M' \arrow[r, "f'"] & N' \arrow[r, "p'"] & Co\ker(f') \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

să fie comutativă, unde i, i' sunt incluziunile canonice iar p, p' sunt epimorfismele canonice.

Demonstrație. Dacă $x \in Ker(f)$, atunci $f'(u(x))=v(f(x))=v(0)=0$, adică $u(x) \in Ker(f')$ şi astfel u' se va defini prin $u'(x)=u(x)$, pentru orice $x \in Ker(f)$. Dacă $y+Im(f) \in Coker(f)$, definim $v'(y+Im(f))=v(y)+Im(f')$ şi cum $v(Im(f)) \subseteq Im(f')$ deducem că şi v' este bine definită.

Se verifică acum imediat că u'şi v' sunt morfismele căutate. ■

Propoziția 2.30. (***Lema serpentinei***). **În $\mathbf{Mod_s(A)}$ considerăm diagrama comutativă:**

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u'"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "u''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "f'"] & N \arrow[r, "g'"] & N'' &
\end{tikzcd}$$

Atunci există un morfism $\mathbf{h:Ker(u'')\to Coker(u')}$ a.î. şirul

$$Ker(u') \xrightarrow{\bar{f}} Ker(u) \xrightarrow{\bar{g}} Ker(u'') \xrightarrow{h} Co\ker(u') \xrightarrow{\bar{f}'} Co\ker(u) \xrightarrow{\bar{g}'} Co\ker(u'')$$

este exact, unde $\bar{f}$, $\bar{g}, \overline{f}', \overline{g}'$ sunt morfismele descrise în Lema 2.18.

Demonstrație. Dacă $x'' \in Ker(u'')$, atunci există $x \in M$ a.î. $g(x)=x''$. Atunci $0=u''(x'')=u''(g(x))=g'(u(x))$, de unde rezultă că $u(x) \in Ker(g')=Im(f')$, adică există $y' \in N'$ a.î. $u(x)=f'(y')$. Definim $h:Ker(u'')\to Coker(u')$ prin $h(x'')=y'+Im(u')$ şi să arătăm că h este corect definită.

Fie deci $x_1 \in M$ cu $g(x_1)=x''$şi $y_1' \in N'$cu $u(x_1)=f'(y_1')$. Cum $g(x_1)=g(x) \Rightarrow x-x_1 \in Ker(g)=Im(f)$, deci există $x' \in M'$ a.î. $x-x_1=f(x')$.

Deci $u(x) = u(x_1+f(x')) = f'(y_1')+u(f(x')) = f'(y_1')+f'(u'(x')) = = f'(y_1'+u'(x'))$, de unde $f'(y')=f'(y_1'+u'(x'))$ şi deci $y'=y_1+u'(x')$, adică $y'+Im(u')=y_1+Im(u')$, de unde concluzia că h este corect definită. Se verifcă acum imediat că h este morfism în $\mathbf{Mod_s(A)}$ şi are proprietatea din enunț.■

Fie $M \in \mathbf{Mod_s(A)}$ fixat. Pentru $N \in \mathbf{Mod_s(A)}$ definim $\mathbf{h}^M(N)=\mathbf{Hom}_A(M, N)$; conform Propoziției 2.3., $\mathbf{h}^M(N)$ împreună cu adunarea morfismelor devine grup abelian. Deci, dacă notăm cu **Ab** categoria ale cărei obiecte sunt grupurile abeliene iar morfismele sunt morfismele de grupuri, atunci $\mathbf{h}^M(N) \in \mathbf{Ab}$.

Să mai considerăm $P \in \mathbf{Mod_s(A)}$ şi $f \in \mathbf{Hom}_A(N, P)$.

Definim $\mathbf{h}^M(f):\mathbf{h}^M(N) \to \mathbf{h}^M(P)$ prin $\mathbf{h}^M(f)(\alpha)=f\circ\alpha$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbf{h}^M(N)$.

Deoarece pentru oricare α, $\beta \in \mathbf{h}^M(N)$, $\mathbf{h}^M(f)(\alpha+\beta)=f\circ(\alpha+\beta)=f\circ\alpha+f\circ\beta=\mathbf{h}^M(f)(\alpha)+\mathbf{h}^M(f)(\beta)$ deducem că $\mathbf{h}^M(f)$ este morfism în **Ab**.

Lema 2.31. $\mathbf{h}^M:\mathbf{Mod_s(A)} \to \mathbf{Ab}$ este un functor covariant.

Demonstrație. Dacă avem $N, P, Q \in \mathbf{Mod_s(A)}$ cum $\mathbf{h}^M(1_M)(\alpha)=1_M\circ\alpha=\alpha$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbf{h}^M(M)$ deducem că $\mathbf{h}^M(1_M)=1_{h^M(M)}$ iar din $\mathbf{h}^M(f\circ g)(\alpha)=(f\circ g)\circ\alpha=f\circ(g\circ\alpha)=(\mathbf{h}^M(f)\circ\mathbf{h}^M(g))(\alpha)$, oricare ar fi $f \in \mathbf{Hom}_A(N, P)$, $g \in \mathbf{Hom}_A(P, Q)$ şi $\alpha \in \mathbf{h}^M(N)$ deducem că $\mathbf{h}^M(f\circ g)=\mathbf{h}^M(f)\circ\mathbf{h}^M(g)$, adică $\mathbf{h}^M$ este functor covariant de la $\mathbf{Mod_s(A)}$ la **Ab**.■

Observația 2.32. Analog se probează că $\mathbf{h}_M:\mathbf{Mod_s(A)} \to \mathbf{Ab}$ definit prin $\mathbf{h}_M(N)=\mathbf{Hom}_A(N, M)$ oricare ar fi $N \in \mathbf{Mod_s(A)}$ iar pentru $P \in \mathbf{Mod_s(A)}$ şi $f \in \mathbf{Hom}_A(N, P)$ $\mathbf{h}_M(f):\mathbf{h}_M(P) \to \mathbf{h}_M(N)$ $\mathbf{h}_M(f)(\alpha)=\alpha\circ f$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbf{h}_M(P)$ este functor contravariant de la $\mathbf{Mod_s(A)}$ la **Ab**.

Propoziția 2.33. Pentru orice $M \in \mathbf{Mod_s(A)}$, functorul $\mathbf{h}^M$ duce monomorfisme în monomorfisme iar $\mathbf{h}_M$ duce epimorfisme în monomorfisme.

Demonstrație. Reamintim că în Capitolul 2 se probează că în **Ab** monomorfismele coincid cu morfismele injective de grupuri, epimorfismele cu morfismele surjective de grupuri iar caracterizarea monomorfismelor şi epimorfismelor în **Mod$_s$(A)** este dată de Teorema 2.7.

Fie $f \in \mathbf{Hom}_A(N, P)$ un monomorfism în **Mod$_s$(A)** şi $\mathbf{h}^M(f):\mathbf{h}^M(N) \to \mathbf{h}^M(P)$. Să alegem $\alpha \in \mathbf{h}^M(N)$ a.î. $\mathbf{h}^M(f)(\alpha)=0$ şi să probăm că $\alpha=0$. Avem că $f \circ \alpha=0$, adică $f(\alpha(x))=0$, oricare ar fi $x \in M$. Cum f este monomorfism deducem că $\alpha(x)=0$, oricare ar fi $x \in M$, adică $\alpha=0$, deci $\mathbf{h}^M(f)$ este monomorfism în **Ab**.

Fie acum $f \in \mathbf{Hom}_A(N, P)$ un epimorfism în **Mod$_s$(A)** şi să probăm că $\mathbf{h}_M(f):\mathbf{h}_M(P) \to \mathbf{h}_M(N)$ este monomorfism în **Ab**.

Pentru aceasta fie $\alpha \in \mathbf{h}_M(P)$ a.î. $\mathbf{h}_M(f)(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha \circ f=0$.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "f"] & P \arrow[r] \arrow[dl, "\alpha"'] & 0 \\ M & & \end{tikzcd}$$

Dacă $y \in P$, cum am presupus că f este epimorfism în **Mod$_s$(A)**, există $x \in N$ a.î. $y=f(x)$. Atunci $\alpha(y)=\alpha(f(x))=(\alpha \circ f)(x)$ şi cum y este oarecare deducem că $\alpha=0$, adică $\mathbf{h}_M(f)$ este monomorfism în **Ab**. ■

În continuare prezentăm un rezultat care ne arată cum „transportă” functorii $\mathbf{h}^M$ şi $\mathbf{h}_M$ şirurile exacte din **Mod$_s$(A)** în **Ab**.

Propoziţia 2.34. Fie M∈Mod$_s$(A)

(i) Dacă $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{g'} N \xrightarrow{g''} N''$ **este un şir exact în Mod$_s$(A), atunci şirul**

(1) $0 \longrightarrow h^M(N') \xrightarrow{h^M(g')} h^M(N) \xrightarrow{h^M(g'')} h^M(N'')$ **este exact în Ab.**

(ii) Dacă $P' \xrightarrow{f'} P \xrightarrow{f''} P'' \longrightarrow 0$ **este un şir exact în Mod$_s$(A), atunci şirul**

(2) $0 \longrightarrow h_M(P'') \xrightarrow{h_M(f'')} h_M(P) \xrightarrow{h_M(f')} h_M(P')$ **este exact în Ab.**

Demonstraţie. (i). Deoarece g' este monomorfism în **Mod$_s$(A)**, conform Propoziţiei 2.2., $\mathbf{h}^M(g')$ este monomorfism în **Ab**, astfel că şirul (1) este exact în $\mathbf{h}^M(N')$. Pentru a proba că şirul (1) este exact mai avem de probat exactitatea sa în $\mathbf{h}^M(N)$ şi anume că $Ker(\mathbf{h}^M(g''))=Im(\mathbf{h}^M(g'))$. Deoarece $g''\circ g'=0$ deducem că $\mathbf{h}^M(g'')\circ\mathbf{h}^M(g')=0$, adică $Im(\mathbf{h}^M(g'))\subseteq Ker(\mathbf{h}^M(g''))$. Pentru cealaltă incluziune fie $\alpha\in Ker(\mathbf{h}^M(g''))$ adică $\mathbf{h}^M(g'')(\alpha)=0\Leftrightarrow g''\circ\alpha=0$. Trebuie să construim $\beta\in\mathbf{h}^M(N')$ a.î. $\alpha=\mathbf{h}^M(g')(\beta)\Leftrightarrow\alpha=g'\circ\beta$.

Fie $x\in M$; atunci $g''(\alpha(x))=0$, de unde $\alpha(x)\in Ker(g'')=Im(g')$, deci există un unic $x'\in N'$ a.î. $\alpha(x)=g'(x')$ (căci g' este monomorfism în $\mathbf{Mod_s(A)}$). Definim atunci $\beta:M\to N'$ prin $\beta(x)=x'$ şi se probează imediat că β este morfismul de A-module căutat. Avem deci egalitatea $Ker(\mathbf{h}^M(g''))=Im(\mathbf{h}^M(g'))$, adică şirul (1) este exact.

(ii). Se probează analog ca (i). ■

Să presupunem că în afara inelului A mai avem un inel unitar B.

Definiția 2.35. Spunem despre grupul abelian aditiv M că este (A; B)-*bimodul* dacă M este A-modul stâng şi B-modul drept şi în plus $(ax)b=a(xb)$ pentru orice $x\in M$, $a\in A$ şi $b\in B$.

Prin notația ${}_AM_B$ vom consemna faptul că M este (A; B)-bimodul.

Exemple 1. Orice modul M peste un inel comutativ A este un (A; A)-bimodul.

2. Dacă $f:A\to B$ este un morfism de inele unitare, atunci $(B, +)$ devine în mod canonic (A; B)-bimodul unde structura de A-modul stâng se obține definind pentru $x\in B$ şi $a\in A$, $a\cdot x= f(a)\cdot x$.

În particular considerând $f=1_A$ deducem că orice inel A are structură canonică de (A; A)-bimodul.

3. Dacă M este un A-modul drept atunci definind pentru $x\in M$ şi $f\in End_A(M)=B$ $f\cdot x=f(x)$, M devine astfel un (B; A)-bimodul.

Să considerăm acum M un A-modul la stânga iar N un (A; B)-bimodul şi grupul abelian $\mathbf{Hom}_A(M, N)$ (ignorând structura de B-modul la dreapta a lui N).

Definind pentru $f \in \mathbf{Hom}_A(M, N)$ şi $b \in B$, $fb:M \to N$ prin $(fb)(x)=f(x) \cdot b$ oricare ar fi $x \in M$, atunci se verifică uşor că în felul acesta $\mathbf{Hom}_A(M, N)$ devine B-modul la dreapta.

Mai mult, dacă $f:M \to M'$ este un morfism în categoria $\mathbf{Mod_s(A)}$ atunci $\mathbf{h}_N(f):h_N(M') \to \mathbf{h}_N(M)$ prin $\mathbf{h}_N(f)(\alpha)=\alpha \circ f$ pentru orice $\alpha \in \mathbf{h}_N(M')=\mathbf{Hom}_A(M', N)$ este un morfism în $\mathbf{Mod_d(B)}$.

Astfel, obținem functorul contravariant $\mathbf{h}_N:\mathbf{Mod_s(A)} \to \mathbf{Mod_d(B)}$.

Analog, dacă M este un B-modul la dreapta şi N este un (A; B)-bimodul, atunci obținem functorul contravariant $\mathbf{h}_N:\mathbf{Mod_d(B)} \to \mathbf{Mod_s(A)}$, pe când dacă M este un (A; B)-bimodul şi N este un A-modul stâng, atunci avem functorul covariant $\mathbf{h}^M:\mathbf{Mod_s(A)} \to \mathbf{Mod_s(B)}$.

Dacă M este un (A; B)-bimodul şi N este un B-modul la dreapta, atunci avem functorul covariant $\mathbf{h}^M:\mathbf{Mod_d(B)} \to \mathbf{Mod_d(A)}$.

Definiția 2.36. Dacă M este un A-modul la stânga prin dualul lui M înțelegem A-modulul la dreapta $\mathbf{h_A(M)}=$ $=\mathbf{Hom_A(M, A)} \overset{def}{=} \mathbf{M^*}$. Elementele lui $\mathbf{M^*}$ se numesc *forme liniare* pe M.

Din cele stabilite mai înainte, pentru $f \in M^*$ şi $a \in A$ avem $f \cdot a \in M^*$, unde pentru $x \in M$, $(f \cdot a)(x)=f(x) \cdot a$.

Dacă $f:M \to N$ este un morfism din $\mathbf{Mod_s(A)}$, atunci $\mathbf{h}_A(f):N^* \to M^*$ definit prin $\mathbf{h}_A(f)(\alpha)=\alpha \circ f$ pentru orice $\alpha \in N^*$ este un morfism în $\mathbf{Mod_d(A)}$.

Convenim să notăm ${}^t f=\mathbf{h}_A(f)$ şi să-l numim pe ${}^t f$ ca fiind *transpusul* lui f.

Observația 2.37. Se probează imediat că dacă M, N, $P \in \mathbf{Mod_s(A)}$ şi f, $g \in \mathbf{Hom}_A(M, N)$, atunci ${}^t(f+g)={}^t f+{}^t g$ şi ${}^t 1_M = 1_{M^*}$ iar dacă $f \in \mathbf{Hom}_A(M, N)$ şi $g \in \mathbf{Hom}_A(N, P)$ atunci ${}^t(g \circ f)={}^t f \circ {}^t g$.

Ținând cont de notațiile de mai sus ca şi de Propoziția 2.34. de la Capitolul 6 avem că dacă $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ este un şir exact în **Mod$_s$(A)**, atunci $0 \longrightarrow P^* \xrightarrow{{}^t g} N^* \xrightarrow{{}^t f} M^*$ este un şir exact în **Mod$_d$(A)**, iar dacă $M \xrightarrow{f} N$ este un epimorfism în **Mod$_s$(A)**, atunci ${}^t f: N^* \to M^*$ este un monomorfism în **Mod$_d$(A)**.

De asemenea, dacă $M \xrightarrow{f} N$ este un este izomorfism în **Mod$_s$(A)**, atunci ${}^t f: N^* \to M^*$ este un izomorfism în **Mod$_d$(A)** şi în plus ${}^t(f^{-1}) = ({}^t f)^{-1}$.

Definiția 2.38. Fie $M \in$ Mod$_s$(A). Prin *bidualul* lui M înțelegem A-modulul la stânga $M^{**} = (M^*)^*$.

Propoziția 2.39. Aplicația $\rho_M: M \to M^{**}$ definită prin $\rho_M(x)(f) = f(x)$ pentru orice $x \in M$ şi $f \in M^*$ este un morfism de A-module stângi (numit *morfismul canonic* al lui M în bidualul său).

Demonstrație. Într-adevăr, dacă x, $y \in M$ şi $a \in A$ atunci a proba că $\rho_M(x+y) = \rho_M(x) + \rho_M(y)$ şi că $\rho_M(ax) = a \cdot \rho_M(x)$ revine la a proba că pentru orice $f \in M^*$ avem $f(x+y) = f(x) + f(y)$ şi $f(ax) = a \cdot f(x)$, ceea ce este evident. Corectitudinea definirii lui ρ_M rezultă din aceea că dacă f, $g \in M^*$, atunci $\rho_M(x)(f+g) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \rho_M(x)(f) + \rho_M(x)(g)$ şi $\rho_M(x)(fa) = (fa)(x) = f(x)a = \rho_M(x)(f)a$. ■

Pentru orice morfism $f: M \to N$ din **Mod$_s$(A)** avem următoarea diagramă comutativă din **Mod$_s$(A)**:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_M"'] & N \arrow[d, "\rho_N"] \\ M^{**} \arrow[r, "{}^{tt} f"'] & N^{**} \end{tikzcd}$$

unde ${}^{tt} f = {}^t({}^t f)$.

Într-adevăr, dacă $x \in M$ avem $({}^{tt}f \circ \rho_M)(x) = {}^t({}^tf)(\rho_M(x)) = \rho_M(x) \circ {}^tf$ şi $(\rho_N \circ f)(x) = \rho_N(f(x))$ şi cum pentru orice $\alpha \in N^* = \mathbf{Hom}_A(N, A)$ avem $(\rho_M(x) \circ {}^tf)(\alpha) = \rho_M(x)({}^tf(\alpha)) = \rho_M(x)(\alpha \circ f) = (\alpha \circ f)(x) = \alpha(f(x)) = \rho_M(f(x))(\alpha)$ deducem că $\rho_M(x) \circ {}^tf = \rho_N(f(x))$ şi deci ${}^{tt}f \circ \rho_M = \rho_N \circ f$, adică diagrama de mai înainte este comutativă.

Să presupunem că M este un A-modul stâng liber având baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Din proprietatea de universalitate a modulelor libere (Teorema 2.19.) deducem că există $e_j^* \in M^*$ cu $1 \leq j \leq n$ a.î. $e_j^*(e_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & pentru\ i \neq j \\ 1 & pentru\ i = j \end{cases}$ $(1 \leq i, j \leq n)$.

Propoziţia 2.40. Cu notaţiile de mai înainte $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ este o bază a A-modulului drept M^* numită *duala* bazei$\{e_1, \ldots, e_n\}$.

În particular deducem că M^* este A-modul liber.

Demonstraţie. Pentru orice $f \in M^*$ avem $f = \sum_{j=1}^{n} e_j^* f(e_j)$ deoarece pentru orice $1 \leq i \leq n$, $\left(\sum_{j=1}^{n} e_j^* f(e_j)\right)(e_i) = \sum_{j=1}^{n} e_j^*(e_i) f(e_j) = e_i^*(e_i) f(e_i) = f(e_i)$.

Deducem deci că $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ este un sistem de generatori pentru M^*. Pentru a arăta şi A-independenţa acestora, fie $a_1, \ldots, a_n \in A$ a.î. $a_1 e_1^* + \ldots + a_n e_n^* = 0$.

Avem $0 = \sum_{j=1}^{n} (e_j^* a_j)(e_i) = \sum_{j=1}^{n} e_j^*(e_i) a_j = e_i^*(e_i) a_i = a_i$ pentru orice $1 \leq i \leq n$. ■

Corolar 2.41. Dacă M este un A-modul stâng de bază finită, atunci morfismul canonic $\rho_M: M \to M^{**}$ este izomorfism de A-module stângi.

Demonstraţie. Fie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază în M iar $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ duala ei în M^*. Dacă $\{e_1^{**}, \ldots, e_n^{**}\}$ este duala în M^{**} a bazei $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ a lui M^*, atunci pentru orice $1 \leq j \leq n$ avem $\rho_M(e_i)(e_j^*) = e_j^*(e_i) = \delta_{ij} = e_i^{**}(e_j^*)$

deci $\rho_M(e_i)=e_i^{**}$ pentru $1\leq i\leq n$. Deducem că ρ_M duce o bază a lui M în bază a lui M^{**}, adică este izomorfism.■

§3. Produse şi sume directe în $Mod_s(A)$. Sume directe de submodule. Produse şi sume directe de morfisme de A-module. Sume şi produse fibrate în $Mod_s(A)$.

În cele ce urmează prin I vom desemna o mulţime nevidă (ce va fi folosită în cea mai mare parte ca mulţime de indici) iar prin $(M_i)_{i\in I}$ o familie de A-module.

Propoziţia 3.1. În $Mod_s(A)$ există produsul direct şi suma directă a familiei $(M_i)_{i\in I}$.

Demonstraţie. Să probăm la început existenţa produsului direct iar pentru aceasta fie $M = \underset{i\in I}{X} M_i = \{(x_i)_{i\in I} | x_i\in M_i$ pentru orice $i\in I\}$.

Pentru $x, y\in M$, $x=(x_i)_{i\in I}$, $y=(y_i)_{i\in I}$ şi $a\in A$ definim:

$$x+y=(x_i+y_i)_{i\in I} \text{ şi } ax=(ax_i)_{i\in I}.$$

Lăsăm pe seama cititorului verificarea faptului că în felul acesta M devine A-modul ca şi faptul că pentru orice $j\in I$, proiecţia $p_j:M\to M_j$ (definită prin $p_j(x)=x_j$ pentru orice $x=(x_i)_{i\in I}\in M$) este morfism de A-module.

Să probăm acum că $\prod_{i\in I} M_i = \left(M, \left(p_j\right)_{j\in I}\right)$ iar pentru aceasta fie M' un alt A-modul iar $(p_j')_{j\in I}$ o familie de morfisme de A-module cu $p_j':M'\to M_j$

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[rr, dashed, "u"] \arrow[dr, "p_j'"'] & & M \arrow[dl, "p_j"] \\ & M_j & \end{tikzcd}$$

Definind $u:M'\to M$ prin $u(x)=((p_j'(x))_{j\in I}$ pentru orice $x\in M'$ se verifică imediat că u este unicul morfism de A-module cu proprietatea că $p_j\circ u=p_j'$ pentru orice $j\in I$, de unde concluzia dorită.

Să probăm acum existența sumei directe a familiei $(M_i)_{i\in I}$ iar pentru aceasta fie $S=\{x\in M|\,supp(x)$ este finită$\}$, unde pentru $x=(x_i)_{i\in I}$ $supp(x)=\{i\in I|\,x_i\neq 0\}$. Se arată imediat că S este submodul al lui M iar $\alpha_i:M_i\to S$ definit pentru $x_i\in M_i$ prin $\alpha_i(x_i)=(x_j')_{j\in I}$ cu $x_j'=x_i$ pentru $j=i$ şi $x_j'=0$ pentru $j\neq i$ este morfism de A-module.

Să probăm acum că în **Mod$_s$(A)**

$$\coprod_{i\in I} M_i = \left(S, (\alpha_i)_{i\in I}\right)$$

iar pentru aceasta fie S' un alt A-modul iar $(\alpha_j')_{j\in I}$ o altă familie de morfisme de A-module cu $\alpha_i':M_i\to S'$ pentru orice $i\in I$. Pentru $x\in S$, definim $v:S\to S'$ prin $v(x)=\sum_{i\in J}\alpha_i'(x_i)$ (deoarece $J=supp(x)$ este finită, suma de mai sus are sens). Se probează imediat că v este morfism de A-module iar $v\circ\alpha_i=\alpha_i'$ pentru orice $i\in I$.

$$\begin{tikzcd}
 & M_i \arrow[dl, "\alpha_i"'] \arrow[dr, "\alpha_i'"] & \\
S \arrow[rr, dashed, shift left, "v"] \arrow[rr, dashed, shift right, "v'"'] & & S'
\end{tikzcd}$$

Dacă mai există un alt morfism de A-module $v':S\to S'$ a.î. $v'\circ\alpha_i=\alpha_i'$ pentru orice $i\in I$, atunci pentru $x\in S$ avem $x=\sum_{i\in J}\alpha_i(x_i)$ şi deci $v'(x)=v'(\sum_{i\in J}\alpha_i(x))=\sum_{i\in J}v'(\alpha_i(x))=\sum_{i\in J}\alpha_i'(x)=v(x)$, adică $v'=v$, de unde concluzia dorită. ■

Observația 3.2. 1. De multe ori (dacă nu este pericol de confuzie) când vorbim de produsul direct sau suma directă înțelegem doar A-modulul subiacent (fără a mai specifica familiile $(p_i)_{i\in I}$ sau $(\alpha_i)_{i\in I}$ de morfisme structurale).

2. Dacă I este o mulțime finită atunci $\prod_{i\in I} M_i = \coprod_{i\in I} M_i$.

Propoziția 3.3. **Un A-modul S este sumă directă de injecții canonice $(\alpha_i)_{i\in I}$ a modulelor $(M_i)_{i\in I}$ dacă şi numai dacă pentru orice $x\in S$ există $x_i\in M_i$ unic determinați şi aproape toți nuli a.î. $x=\sum_{i\in I}\alpha_i(x_i)$.**

Demonstrație. „$\Rightarrow$”. Dacă considerăm $L=\{x\in S \mid$ există $x_i\in M_i$ aproape toți nuli a.î. $x=\sum_{i\in I}\alpha_i(x_i)\}$, se verifică imediat că L este submodul al lui S şi să considerăm epimorfismul canonic $p:S\to S/L$. Cum $Im(\alpha_i)\subseteq L$ pentru orice $i\in I$ deducem că $p\circ\alpha_i=\mathbf{0}$ pentru orice $i\in I$.

Să considerăm pentru fiecare $i\in I$ diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & M_i \arrow[dl, "\alpha_i"'] \arrow[dr, dashed, "\alpha_i'"] & \\
S \arrow[rr, dashed, shift left, "p"] \arrow[rr, dashed, shift right, "0"'] & & S/L
\end{tikzcd}$$

cu $p\circ\alpha_i=\alpha_i'$. Deoarece p şi morfismul nul $\mathbf{0}:S\to S/L$ închid diagrama de mai înainte (pentru orice $i\in I$), datorită unicității din definiția sumei directe, deducem că $p=\mathbf{0}$, adică $S=L$.

Dacă $x=\sum_{i\in I}\alpha_i(x_i)$, atunci $p_j(x)=\sum_{i\in I}(p_j\circ\alpha_i)(x_i)=(p_j\circ\alpha_j)(x_j)=$ $=1_{M_j}(x_j)=x_j$ (p_j fiind proiecția canonică), de unde deducem unicitatea scrierii lui x ca în enunț.

„⇐". Pentru a proba că $\coprod_{i\in I} M_i = \left(S, (\alpha_i)_{i\in I}\right)$, fie S′ un alt A-modul iar $(\alpha_i')_{i\in I}$ o familie de morfisme de A-module cu $\alpha_i':M_i\to S'$. Pentru x∈S, x=$\sum_{i\in I}\alpha_i(x_i)$, definim u:S→S′, u(x)=$\sum_{i\in I}\alpha_i'(x_i)$ şi se verifică imediat că u este unicul morfism de A–module cu proprietatea că $u\circ\alpha_i=\alpha_i'$, pentru orice i∈I, de unde concluzia din enunţ. ■

Propoziţia 3.4. Fie M un A-modul iar $(M_i)_{i\in I}$ o familie de submodule ale lui M, S=$\sum_{i\in I} M_i$ iar $\alpha_i:M_i\to S$, i∈I morfismele incluziune. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $\coprod_{i\in I} M_i = \left(S, (\alpha_i)_{i\in I}\right)$

(ii) Orice x∈S se scrie în mod unic sub forma x =$\sum_{i\in I}\alpha_i(x_i)$, $x_i\in M_i$

(iii) Dacă $\sum_{i\in I} x_i$ = 0 cu $x_i\in M_i$, aproape toate nule atunci x_i = 0

(iv) Pentru orice i∈I, $M_i \cap \left(\sum_{i\neq j} M_j\right)$= 0.

Demonstraţie. Echivalenţa (i)⇔(ii). rezultă din Propoziţia 3.2. iar (ii)⇔(iii). este evidentă.

(iii)⇒(iv). Fie $x_i\in M_i \cap \left(\sum_{i\neq j} M_j\right)$. Atunci $x_i\in M_i$ şi $x_i=\sum_{j\neq i} x_j$, deci $x_i-\sum_{j\neq i} x_j$ = 0, de unde în particular x_i= 0, adică $M_i \cap \left(\sum_{i\neq j} M_j\right)$= **0**.

(iv)⇒(iii). Fie $x_i\in M_i$ a.î. $\sum_{i\in I} x_i$ = 0. Pentru orice i∈I avem $x_i=-\sum_{j\neq i} x_j \in M_i \cap \left(\sum_{i\neq j} M_j\right)$= **0**, deci x_i=0. ■

Definiţia 3.5. Dacă o familie $(M_i)_{i\in I}$ de submodule ale lui M satisface una din condiţiile echivalente ale Propoziţiei 3.4. spunem

că suma S=$\sum_{i\in I} M_i$ este *directă* şi consemnăm acest fapt prin notaţia $S=\underset{i\in I}{\oplus} M_i$ şi spunem că fiecare M_i este *sumand direct* al lui S.

Exemple. 1. Dacă M este un A-modul liber de bază $(e_i)_{i\in I}$ atunci $M=\underset{i\in I}{\oplus}(Ae_i)$.

2. Dacă V este un K-spaţiu vectorial, atunci orice subspaţiu V' al lui V este sumand direct al lui V.

Într-adevăr, dacă $(e_i)_{i\in I}$ este o bază a lui V' iar $(f_j)_{j\in J}$ este o bază alui V ce se obţine prin completarea lui $(e_i)_{i\in I}$ atunci notând prin V'' subspaţiul lui V generat de vectorii $f_j \notin V'$, deducem că $V=V'\oplus V''$.

3. Fie M_1 şi M_2 două A-module stângi iar $M=M_1\amalg M_2=M_1\times M_2=\{(x, y)|x\in M_1 \text{ şi } y\in M_2\}$.

Dacă $\overline{M_1}=\{(x, 0)|x\in M_1\}$ şi $\overline{M_2}=\{(0, y)|y\in M_2\}$, atunci $\overline{M_1}$ şi $\overline{M_2}$ sunt submodule ale lui M iar $M=\overline{M_1}\oplus\overline{M_2}$.

Definiţia 3.6. Dacă $M\in Mod_s(A)$ şi $f\in End(M)$, vom spune despre f că este un *proiector* al lui M dacă f este element idempotent al inelului (End(M), +, $\circ$) (adică $f^2=f$).

Propoziţia 3.7. Pentru $M\in Mod_s(A)$ şi N, $P\in L_A(M)$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $M=N\oplus P$

(ii) Există un unic proiector $f\in End(M)$ a.î. N=Im(f) şi P=Ker(f).

Demonstraţie. (i)$\Rightarrow$(ii). Dacă $x\in M$, cum $M=N\oplus P$ există şi sunt unice $y\in N$ şi $z\in P$ a.î. $x=y+z$. Definind $f:M\to M$ prin $f(x)=y$ se verifică imediat că $f\in$ **End**(M) şi cum $f(x)=f(x)+0$ avem $f(f(x))=f(x)$, adică f este un proiector al lui M. În mod evident N=Im(f) şi P=Ker(f).

Dacă mai avem un alt proiector $g\in$ **End**(M) a.î. N=Im(g) şi P=Ker(g) scriind pentru $x\in M$, $x=y+z$, cu $y\in N$ şi $z\in P$ avem $g(x)=g(y)+g(z)=g(y)=y=f(x)$, adică f=g.

(ii)$\Rightarrow$(i). Dacă $x\in M$, din $f(f(x))=f(x)$ deducem că $f(x-f(x))=0$, adică $x-f(x)\in Ker(f)$, deci $M=Ker(f)+Im(f)$. Dacă $x\in Ker(f)\cap Im(f)$, atunci $f(x)=0$ şi cum $x=f(y)$ cu $y\in M$ avem $0=f(x)=f(f(y))=f(y)=x$, adică $Ker(f)\cap Im(f)=\mathbf{0}$ şi astfel $M=Ker(f)\oplus Im(f)$. ■

Corolar 3.8. Dacă M, $N\in Mod_s(A)$ iar $f:M\to N$ este morfism de A-module inversabil la dreapta atunci N este sumand direct al lui M.

Demonstrație. Din ipoteză există $g:N\to M$ morfism de A-module a.î. $f\circ g=1_N$. Deducem imediat că f este epimorfism iar g este monomorfism de A-module şi deci $N=Im(f)$ iar $Ker(f)=Ker(g\circ f)$.

Dacă notăm $p=g\circ f$, atunci $p^2=p\circ p=(g\circ f)\circ(g\circ f)=g\circ(f\circ g)\circ f= =g\circ 1_N\circ f=g\circ f=p$, adică p este proiector al lui M şi deci $M=Ker(p)\oplus Im(p)$ (conform Propoziției 3.7.).

Conform Teoremei 2.11. avem:

$$N=Im(f)\approx M/Ker(f)=M/Ker(p)\approx Im(p),$$

adică N este sumand direct al lui M.■

Analog se demonstrează acum:

Corolarul 3.9. Dacă M, $N\in Mod_s(A)$ iar $f:M\to N$ este morfism de A-module inversabil la stânga, atunci M este sumand direct al lui N.

Fie $(M_i)_{i\in I}$ şi $(N_i)_{i\in I}$ două familii de A-module iar $(f_i)_{i\in I}$ o familie de morfisme de A-module cu $f_i:M_i\to N_i$. Definim $f:\prod_{i\in I}M_i\to\prod_{i\in I}N_i$ prin $f(x)=(f_i(x_i))_{i\in I}$ pentru orice $x=(x_i)_{i\in I}$ (cu $x_i\in M_i$) şi $g:\coprod_{i\in I}M_i\to\coprod_{i\in I}N_i$ ca fiind restricția lui f la $\coprod_{i\in I}M_i$ (în mod evident, dacă *supp*(x) este mulțime finită, atunci *supp*(f(x)) este de asemenea finită).

Se verifică imediat că f şi g sunt morfisme de A-module.

Definiția 3.10. Convenim să notăm $f=\prod_{i\in I} f_i$ şi $g=\coprod_{i\in I} f_i$ şi să le numim pe f şi g ca fiind *produsul direct* (respectiv *suma directă*) a familiei $(f_i)_{i\in I}$.

Fie $(M_i')_{i\in I}$, $(M_i)_{i\in I}$ şi $(M_i'')_{i\in I}$ trei familii de A-module iar $(f_i)_{i\in I}$, $(g_i)_{i\in I}$ două familii de morfisme de A-module cu $f_i:M_i'\to M_i$ iar $g_i:M_i\to M_i''$. Notăm $f'=\prod_{i\in I} f_i$, $g'=\prod_{i\in I} g_i$, $f''=\coprod_{i\in I} f_i$ şi $g''=\coprod_{i\in I} g_i$.

Propoziția 3.11. Dacă pentru orice $i\in I$ şirul $0\longrightarrow M_i' \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{g_i} M_i'' \longrightarrow 0$ este exact, atunci şi şirurile

$$0\longrightarrow \prod_{i\in I} M_i' \xrightarrow{f'} \prod_{i\in I} M_i \xrightarrow{g'} \prod_{i\in I} M_i'' \longrightarrow 0$$

$$0\longrightarrow \coprod_{i\in I} M_i \xrightarrow{f''} \coprod_{i\in I} M_i \xrightarrow{g''} \coprod_{i\in I} M_i'' \longrightarrow 0$$

sunt exacte.

Demonstrație. Fie $x'=(x_i')_{i\in I}\in\prod_{i\in I} M_i'$ a.î. $f'(x')=0$. Cum $f'(x')=(f_i(x_i'))_{i\in I}$ deducem că $f_i(x_i')=0$ adică $x_i'=0$ şi astfel $x'=0$, deci f' este monomorfism.

Dacă alegem $x''=(x_i'')_{i\in I}\in\prod_{i\in I} M_i''$, atunci $x_i''=g_i(x_i)$ cu $x_i\in M_i$, astfel că dacă notăm $x=(x_i)_{i\in I}$ avem $x''=g'(x)$, deci g' este epimorfism.

Deoarece $g'\circ f'=\prod_{i\in I}(g_i\circ f_i)=0$, deducem că $Im(f')\subseteq Ker(g')$.

Fie $x=(x_i)_{i\in I}\in Ker(g')$. Atunci pentru orice $i\in I$ $g_i(x_i)=0$, deci $x_i\in Ker(g_i)=Im(f_i)$, adică $x_i=f_i(x_i')$ cu $x_i'\in M_i'$. Dacă notăm $x'=(x_i')_{i\in I}\in\prod_{i\in I} M_i'$ atunci $x=f'(x')$ şi $x\in Im(f')$, deci $Ker(g')\subseteq Im(f')$, de unde egalitatea $Im(f') = Ker(g')$.

Faptul că al doilea şir este exact se probează analog. ■

Teorema 3.12. Categoria $Mod_s(A)$ este o categorie cu sume şi produse fibrate.

Demonstrație. Trebuie să demonstrăm că dacă M, N, P$\in$**Mod$_s$(A),** atunci există $M \coprod_P N$ şi $M \Pi_P N$ (vezi Capitolul 5, §8.).

Pentru a proba existența sumei fibrate, să considerăm în **Mod$_s$(A)** diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dr, dashed, "\alpha_M"] & \\
P \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & S \\
 & N \arrow[ur, dashed, "\alpha_N"'] &
\end{tikzcd}$$

unde $S = M \coprod N$ iar α_M:M$\to$S, α_N:N$\to$S sunt morfismele canonice ale sumei directe. Fie $S'=\{\alpha_M(f(x))-\alpha_N(g(x)) \mid x\in P\}$. Să arătăm că S′ este submodul al lui S iar pentru aceasta fie x, y$\in$P şi a, b$\in$A.

Atunci $a[\alpha_M(f(x))-\alpha_N(g(x))]+b[\alpha_M(f(y))-\alpha_N(g(y))]=$
$=\alpha_M(af(x)+bf(y))-\alpha_N(ag(x)+bg(y))=\alpha_M(f(ax+by))-\alpha_N(g(ax+by))\in S'$
deoarece ax+by$\in$P.

Notăm $\overline{S}$ =S/S′ şi fie p:S$\to \overline{S}$ epimorfismul canonic, $\overline{\alpha}_M$ =p$\circ\alpha_M$ iar $\overline{\alpha}_N$ =p$\circ\alpha_N$:

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dr, "\overline{\alpha}_M"] & \\
P \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & \overline{S} \\
 & N \arrow[ur, "\overline{\alpha}_N"'] &
\end{tikzcd}$$

şi să demonstrăm că $M \coprod_P N$ =($\overline{\alpha}_M$, $\overline{\alpha}_N$, $\overline{S}$).

Dacă x$\in$P, atunci $(\overline{\alpha}_M \circ f)(x)=(\overline{\alpha}_M(f(x)))=p(\alpha_M(f(x)))$, $(\overline{\alpha}_N \circ g)(x)=\overline{\alpha}_N(g(x))=p(\alpha_N(g(x)))$, astfel că a proba că $\overline{\alpha}_M \circ f=\overline{\alpha}_N \circ g$

revine la a proba că $p(\alpha_M(f(x)))=p(\alpha_N(g(x)))\Leftrightarrow\alpha_M(f(x))-\alpha_N(g(x))\in S'$ pentru orice $x\in P$, ceea ce este evident.

Să considerăm acum un alt triplet (β_M, β_N, T) a.î. diagrama din **Mod$_s$(A)**:

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dr, "\beta_M"] & \\
P \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & T \\
 & N \arrow[ur, "\beta_N"'] &
\end{tikzcd}$$

este comutativă şi să demonstrăm că există un unic morfism de A-module $u:\overline{S}\to T$ a.î. $u\circ\overline{\alpha}_M=\beta_M$ şi $u\circ\overline{\alpha}_N=\beta_N$.

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dr, "\overline{\alpha}_M"] \arrow[drr, "\beta_M"] & & \\
P \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & \overline{S} \arrow[r, dashed, "u"] & T \\
 & N \arrow[ur, "\overline{\alpha}_N"'] \arrow[urr, "\beta_N"'] & &
\end{tikzcd}$$

Din proprietatea de universalitate a sumei directe, există un unic morfism de A-module $v: S\to T$ a.î. $v\circ\alpha_M=\beta_M$ şi $v\circ\alpha_N=\beta_N$:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "\alpha_M"] \arrow[drr, "\beta_M"] & & \\
 & S \arrow[r, dashed, "v"] & T \\
N \arrow[ur, "\alpha_N"'] \arrow[urr, "\beta_N"'] & &
\end{tikzcd}$$

Definim u: $\overline{S}$ →T prin u(x+S′)=v(x) pentru orice x∈S şi să arătăm la început că u este corect definită.

Într-adevăr, dacă x, y∈S a.î. x+S′=y+S′, atunci x-y∈S′, adică

$$x-y=\alpha_M(f(z))-\alpha_N(g(z)) \text{ cu } z\in P.$$

Atunci $v(x-y) = (v\circ\alpha_M)(f(z))-(v\circ\alpha_N)(g(z)) = \beta_M(f(z)) - \beta_N(g(z))=$ $=(\beta_M\circ f)(z)-(\beta_N\circ g)(z)=0$ (căci $\beta_M\circ f=\beta_N\circ g$), adică v(x)=v(y). Se probează acum imediat că u: $\overline{S}$ →T este unicul morfism de A-module a.î. $u\circ\overline{\alpha}_M=\beta_M$ şi $u\circ\overline{\alpha}_N=\beta_N$, de unde concluzia că $M\coprod_P N=(\overline{\alpha}_M, \overline{\alpha}_N, \overline{S})$.

Pentru a proba existența produsului fibrat să considerăm în **Mod$_s$(A)** diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "f"] & \\
& P \\
N \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Fie $K = M\prod N$ iar p_M:K→M şi p_N:K→N proiecțiile canonice ale produsului direct. Să notăm $\overline{K}$={(x, y)∈K|f(x)=g(y)} iar $\overline{p}_M$, $\overline{p}_N$ restricțiile lui p_M şi p_N la $\overline{K}$.

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dr, "f"] & \\
\overline{K} \arrow[ur, "\overline{p}_M"] \arrow[dr, "\overline{p}_N"'] & & P \\
& N \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Se probează imediat că $\overline{K}$ este submodul al lui K iar $(\overline{K}, \overline{p}_M, \overline{p}_N) = M\prod_P N$. ■

Fie M un A-modul iar $(M_i)_{i\in I}$ o familie de submodule ale lui M. Pentru $i\in I$ prin $\beta_i:M_i\to M$ vom desemna morfismul incluziune.

Definiția 3.13. Vom spune despre familia $(M_i)_{i\in I}$ de submodule ale lui M că este *independentă* (sau că $\sum_{i\in I} M_i$ este *directă*) dacă pentru orice $i\in I$, $M_i \cap \left(\sum_{j\in I\setminus\{i\}} M_j\right) = 0$ (vezi şi Definiția 3.5.).

Considerăm $\coprod_{i\in I} M_i$ şi $v:\coprod_{i\in I} M_i \to M$ ca fiind unicul morfism de A-module cu proprietatea că $v\circ\alpha_i=\beta_i$ pentu orice $i\in I$ ($(\alpha_i)_{i\in I}$ fiind morfismele canonice ale sumei directe definite în demonstrația Propoziției 3.1). De fapt, dacă $x\in \coprod_{i\in I} M_i$, $x=(x_i)_{i\in I}$ cu $J=$*supp*(x) finită, atunci v se defineşte prin $v(x)=\sum_{i\in J} x_i$. Ținând cont şi de Propoziția 3.4. avem un rezultat mai general:

Teorema 3.14. Cu notațiile de mai sus următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) Familia $(M_i)_{i\in I}$ este independentă

(ii) Pentru orice parte finită $J\subseteq I$, familia $(M_i)_{i\in J}$ este independentă

(iii) $\coprod_{i\in I} M_i = \left(\sum_{i\in I} M_i, (\beta_i)_{i\in I}\right)$

(iv) v este monomorfism

(v) Orice element $x\in \sum_{i\in I} M_i$ are o unică scriere $x=\sum_{i\in I} x_i$, cu $x_i\in M_i$ iar *supp*$((x_i)_{i\in I})$ este finită.

Demonstrație. (i)⇒(ii). este evidentă

(ii)⇒(i). Fie $i\in I$ şi $x\in M_i\cap\left(\sum_{j\in I\setminus\{i\}}M_j\right)$; atunci există $j_1, \ldots, j_n\in I$ a.î. $x\in M_i$ şi $x=x_{j1}+\ldots+x_{jn}$ unde $x_{jk}\in M_{jk}$, $1\le k\le n$. Dacă notăm $J=\{j_1, \ldots, j_n\}$ atunci $x\in M_i\cap\left(\sum_{j\in I\setminus\{i\}}M_j\right)=0$, de unde $x=0$.

Să vedem acum la ce revine egalitatea $\coprod_{i\in I}M_i=\left(\sum_{i\in I}M_i,(\beta_i)_{i\in I}\right)$. Conform definiției sumei directe, acest lucru revine la a proba că dacă M' este un alt A-modul iar $(\beta_i')_{i\in I}$ o familie oarecare de morfisme de A-module atunci există un unic morfism de A-module $u:\sum_{i\in I}M_i\to M'$ a.î. $u\circ\beta_i=\beta_i'$, pentru orice $i\in I$. Deoarece β_i este o incluziune, u se defineşte pentru $x=x_{i_1}+\ldots+x_{i_n}$ (cu $x_{i_k}\in M_{i_k}$, $1\le j\le n$) prin $u(x)=\sum_{j=1}^{n}\beta_{i_j}{}'(x)$ $(\star)$

Să arătăm acum echivalența (iii)⇔(iv).

(iii)⇒(iv). Considerăm $M'=M$ şi β_i'=incluziunea lui M_i în $\sum_{i\in I}M_i$, atunci $u:\sum_{i\in I}M_i\to M$ definit prin $(\star)$ coincide de fapt cu v şi datorită unicității lui u (din definiția sumei directe) deducem că v este monomorfism.

(iv)⇒(iii). Pentru a demonstra că $\coprod_{i\in I}M_i=\left(\sum_{i\in I}M_i,\left(\beta_i'\right)_{i\in I}\right)$ fie M' un alt A-modul şi $(\beta_i')_{i\in I}$ o familie oarecare de morfisme de A-module cu $\beta_i':M_i\to M'$. Faptul că am presupus că v este monomorfism ne permite să-l definim pe $u:\sum_{i\in I}M_i\to M'$ prin egalitatea dată de $(\star)$.

(iv)⇒(v) este imediată. ■

Observația 3.15. 1. Dacă M este un A-modul iar I este o mulțime oarecare, convenim să notăm $M^I=\prod_{i\in I}M_i$ şi $M^{(I)}=\coprod_{i\in I}M_i$ unde $M_i=M$ pentru orice $i\in I$.

2. $M^{(I)}$ este A-modul liber. Într-adevăr, dacă pentru $i\in I$ notăm $e_i=(x_j)_{j\in I}\in M^{(I)}$ unde $x_j=1$ pentru $i=j$ şi $x_j=0$ pentru $j\in I\setminus\{i\}$ atunci $(e_i)_{i\in I}$ este o bază pentru $M^{(I)}$.

Propoziția 3.16. Fie M un A-modul liber iar $B=(x_i)_{i\in I}\subset M$ o bază a sa. Atunci $M\approx A^{(I)}$.

Demonstrație. Pentru $x\in M$ există $I'\subset I$ finită a.î. $x=\sum_{i\in I'} a_i x_i$ cu $a_i\in A$ ($i\in I'$) unic determinați.Definim $f:V\to A^{(I)}$ prin $f(x)=b$, unde $b=(b_i)_{i\in I}\in A^{(I)}$ iar $b_i=a_i$ pentru $i\in I'$ şi $b_i=0$ pentru $i\in I\setminus I'$. Se arată acum uşor că f este izomorfism de A-module. ∎

Corolar 3.17. Dacă M şi N sunt două A-module libere, cu baze infinite, atunci M şi N sunt izomorfe dacă şi numai dacă bazele lui M şi N sunt echipotente.

Demonstrație. Totul rezultă din Teorema 1.18., Corolarul 2.17. şi Propoziția 3.16. ∎

Corolar 3.18. Două spații vectoriale peste acelaşi corp K sunt izomorfe dacă şi numai dacă au aceeaşi dimensiune peste K.

Corolar 3.19. Pentru orice A-modul M există un A-modul liber L şi un morfism surjectiv de A-module $f:L\to M$. În particular, dacă M este finit generat, atunci putem alege pe L cu bază finită.

Demonstrație. Fie $X=(x_i)_{i\in I}\subset M$ un sistem de generatori (în cel mai rău caz putem alege X=M). Conform Observației 3.15., $L=M^{(I)}$ este A-modul liber şi fie $(e_i)_{i\in I}$ baza sa canonică. Unicul morfism de A-module $f:L\to M$ a.î. $f(e_i)=x_i$ pentru orice $i\in I$ este surjectiv, conform Propoziției 2.16. ∎

Corolar 3.20. (*Grassmann*) Fie V un K-spațiu vectorial de dimensiune finită iar U, W două subspații vectoriale ale lui V.

Atunci: $\dim_K(U+W)=\dim_K U+\dim_K W-\dim_K(U\cap W)$.

Demonstrație. Conform Corolarului 2.13. avem izomorfismul $(U+W)/U \approx W/(U \cap W)$ şi totul rezultă acum din Corolarul 3.18. şi Corolarul 2.20.

Sugerăm cititorului o altă soluție directă, în sensul ca să considere $\{e_1,\ldots,e_n\} \subseteq U \cap W$ o bază care se poate completa (conform Teoremei 1.13.) cu $f_1,\ldots,f_m \in U$ şi $g_1,\ldots,g_p \in W$ a.î. $\{e_1,\ldots,e_n, f_1,\ldots,f_m\} \subseteq U$ este bază iar $\{e_1,\ldots,e_n, g_1, \ldots,g_p\} \subseteq W$ este bază. Este doar chestiune de rutină acum să se arate că $\{e_1,\ldots,e_n, f_1,\ldots,f_m, g_1,\ldots,g_p\}$ este bază pentru U+W şi astfel relația din enunț se verifică: $n+m+p=(n+m)+(n+p)-n$. ■

§4. Limite inductive şi proiective în $Mod_s(A)$. Limite inductive şi proiective de morfisme de A-module.

În cadrul acestui paragraf prin $(I, \leq)$ vom desemna o mulțime parțial ordonată şi filtrantă la dreapta (adică pentru orice $i, j \in I$ există $k \in I$ a.î. $i \leq k$ şi $j \leq k$).

Teorema 4.1. Orice sistem inductiv de A-module peste mulțimea I are limită inductivă.

Demonstrație. Reamintim (vezi Capitolul 5, §7) că prin *sistem inductiv* de A-module peste I înțelegem o familie $(M_i)_{i\in I}$ de A-module împreună cu morfismele $u_{ij}:M_i \to M_j$ definite pentru orice pereche (i, j) cu $i \leq j$ a.î. $u_{ii}=1_{M_i}$ pentru orice $i \in I$ şi $u_{jk} \circ u_{ij}=u_{ik}$ dacă $i \leq j \leq k$. Un astfel de sistem îl vom nota mai simplu $\mathfrak{I}=(M_i, u_{ij})$.

Fie $\coprod_{i\in I} M_i = \left(M,(\alpha_i)_{i\in I}\right)$ iar L submodulul lui M generat de elementele de forma $\alpha_i(x_i)-\alpha_j(u_{ij}(x_i))$ cu $x_i \in M_i$ iar $i, j \in I$, $i \leq j$. Notăm $\overline{M}=M/L$, $p:M \to \overline{M}$ epimorfismul canonic şi $\varepsilon_i=p \circ \alpha_i$ pentru orice $i \in I$.

Vom demonstra că $\left(\overline{M},(\varepsilon_i)_{i\in I}\right)=\varinjlim_{i\in I} M_i$ iar pentru aceasta să arătăm la început că dacă $i, j \in I$, $i \leq j$, atunci $\varepsilon_j \circ u_{ij}=\varepsilon_i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(p\circ\alpha_j)\circ u_{ij}=p\circ\alpha_i\Leftrightarrow p\circ(\alpha_j\circ u_{ij})=p\circ\alpha_i\Leftrightarrow\alpha_i(x_i)-\alpha_j(u_{ij}(x_i))\in L$ pentru orice $x_i\in M_i$, ceea ce este evident.

Fie acum M' un alt A-modul şi $(\varepsilon_i')_{i\in I}$ o familie oarecare de morfisme de A-module a.î. pentru orice i, $j\in I$, $i\leq j$ să avem $\varepsilon_j'\circ u_{ij}=\varepsilon_i'$ şi să demonstrăm că există un unic morfism de A-module $\overline{u}:\overline{M}\to M'$ a.î. $\overline{u}\circ\varepsilon_i=\varepsilon_i'$ pentru orice $i\in I$.

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{M} \arrow[d, dashed, "\overline{u}"] \\
M_i \arrow[ur, "\varepsilon_i"] \arrow[r, "\varepsilon_i'"'] & M'
\end{tikzcd}$$

Conform proprietății de universalitate a sumei directe, există un unic morfism de A-module $u:M=\coprod_{i\in I}M_i\to M'$ a.î. diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[r, dashed, "p"] \arrow[d, "u"] & \overline{M}=M/L \arrow[dl, dashed, "\overline{u}"] \\
M_i \arrow[ur, "\alpha_i"] \arrow[r, "\varepsilon_i'"'] & M' &
\end{tikzcd}$$

este comutativă pentru orice $i\in I$ (adică $u\circ\alpha_i=\varepsilon_i'$ pentru orice $i\in I$).

Definim $\overline{u}:\overline{M}\to M'$ prin $\overline{u}$ (x+L)=u(x) pentru orice x∈M.

Dacă x+L=y+L, atunci x-y∈L, adică

x-y=$\sum_{k=1}^{n} a_k\left[\alpha_{i_k}\left(x_{i_k}\right)-\alpha_{j_k}\left(u_{i_k j_k}\left(x_{i_k}\right)\right)\right]$ (cu a_k∈A, i_k, j_k∈I, $i_k \leq j_k$ şi $x_{i_k}\in M_{i_k}$, $1\leq k\leq n$). Deducem imediat că:

$$u(x-y)=\sum_{k=1}^{n} a_k\left[\left(u\circ\alpha_{i_k}\right)\left(x_{i_k}\right)-\left(u\circ\alpha_{j_k}\right)\left(u_{i_k j_k}\left(x_{i_k}\right)\right)\right]=\sum_{k=1}^{n} a_k\left[\varepsilon_{i_k}{}'\left(x_{i_k}\right)-\varepsilon_{j_k}{}'\left(u_{i_k j_k}\left(x_{i_k}\right)\right)\right]=$$
$$=\sum_{k=1}^{n} a_k\left[\varepsilon_{i_k}{}'\left(x_{i_k}\right)-\varepsilon_{i_k}{}'\left(x_{i_k}\right)\right]=0,$$

de unde concluzia că u(x)=u(y), adică $\overline{u}$ este corect definită. Se verifică imediat că $\overline{u}$ este morfism de A-module şi că $\overline{u}\circ\varepsilon_i=\varepsilon_i'$ pentru orice i∈I şi astfel teorema este demonstrată. ■

Corolar 4.2. Cu notaţiile de mai sus avem:

(i) $\varinjlim_{i\in I} M_i \overset{not}{=} \overline{M}=\bigcup_{i\in I}\varepsilon_i\left(M_i\right)$

(ii) Dacă $x_i\in M_i$, atunci $\varepsilon_i(x_i)=0$ dacă şi numai dacă există j∈I a.î. $i\leq j$ şi $u_{ij}(x_i)=0$

(iii) Dacă $x_i\in M_i$, $x_j\in M_j$, atunci $\varepsilon_i(x_i)=\varepsilon_j(x_j)$ dacă şi numai dacă există k∈I a.î. $i\leq k$, $j\leq k$ şi $u_{ik}(x_i)=u_{jk}(x_j)$.

Demonstraţie. (i). Fie y∈$\overline{M}$; dacă p:M→$\overline{M}$ este epimorfismul canonic, atunci y=p(x) cu x∈M=$\coprod_{i\in I} M_i$. Scriind $x=\alpha_{i_1}\left(x_{i_1}\right)+...+\alpha_{i_n}\left(x_{i_n}\right)$ putem găsi i∈I a.î. i_1, …, $i_n\leq i$ şi deoarece $\varepsilon_i=\varepsilon_j\circ u_{ij}$ pentru orice $i\leq j$ avem:

$$y=p(x)=\left(p\circ\alpha_{i_1}\right)\left(x_{i_1}\right)+...+\left(p\circ\alpha_{i_n}\right)\left(x_{i_n}\right)=\varepsilon_{i_1}\left(x_{i_1}\right)+...+\varepsilon_{i_n}\left(x_{i_n}\right)=$$
$$=\varepsilon_i\left(u_{i_1 i}\left(x_{i_1}\right)\right)+...+\varepsilon_i\left(u_{i_n i}\left(x_{i_n}\right)\right)=\varepsilon_i\left(x_i\right)$$

unde $x_i=u_{i_1 i}\left(x_{i_1}\right)+...+u_{i_n i}\left(x_{i_n}\right)\in M_i$.

(ii). Deoarece pentru $i\leq j$, $\varepsilon_i=\varepsilon_j\circ u_{ij}$ implicaţia $u_{ij}(x_i)=0\Rightarrow\varepsilon_i(x_i)=0$ este clară.

Să probăm acum că $\varepsilon_i(x_i)=0$. Atunci $p(\alpha_i(x_i))=0 \Rightarrow \alpha_i(x_i)\in L$, deci $\alpha_i(x_i)$ este o combinaţie liniară (cu scalari din A) de elemente de forma:

$(\star)$ $\alpha_j(x_j)-\alpha_k(u_{jk}(x_j))$ cu $j\leq k$ şi $x_j\in M_j$.

Alegem $t\in I$ ce majorează pe toţi j, k ce apar în scrierea lui $\alpha_i(x_i)$ precum şi pe i. Scriind $\alpha_t(u_{it}(x_i))=\alpha_i(x_i)-[\alpha_i(x_i)-\alpha_t(u_{it}(x_i))]$ şi $\alpha_j(x_j)-\alpha_k(u_{jk}(x_j)) = \alpha_j(x_j) - \alpha_t(u_{jt}(x_j)) - [\alpha_k(u_{jk}(x_j)) - \alpha_t(u_{kt}(u_{jk}(x_j)))]$, (căci $u_{kt}\circ u_{jk} = u_{jt}$) deducem că $\alpha_t(u_{it}(x_i))$ este o combinaţie liniară de elemente de forma $(\star)$ în care toţi k sunt egali cu t. Putem deci presupune de la început că $\alpha_t(u_{it}(x_i))$ este o sumă de elemente de forma

$(\star\star)$ $\alpha_j(x_j)-\alpha_t(u_{jt}(x_j))$ cu $j\leq t$.

Mai mult, făcând eventualele reduceri de termeni pentru fiecare $j\leq t$ putem scrie

$(\star\star\star)$ $\alpha_t(u_{it}(x_i))=\sum_{r=1}^{n}\left[\alpha_{j_r}(x_{j_r})-\alpha_t(u_{j_r t}(x_{j_r}))\right]$, unde $j_1, \ldots, j_n\leq t$ sunt distincţi doi cîte doi.

Evident, pentru $j_s\neq t$ din $(\star\star\star)$ deducem că $\alpha_{j_s}(x_{j_s})=0$, adică $x_{j_s}=0$.

Să demonstrăm că $u_{it}(x_i)=0$ (adică putem alege pe j din enunţ ca fiind egal cu t). Dacă prin absurd $u_{it}(x_i)\neq 0$ atunci $\alpha_t(u_{it}(x_i))\neq 0$ şi din $(\star\star\star)$ deducem că există un j_s a.î. $j_s=t$. Astfel, pentru $r\neq s$, $x_{j_r}=0$ şi deci $\alpha_t(u_{it}(x_i))=\alpha_t(x_t)-\alpha_t(u_{tt}(x_t))=0$ - contradicţie.

(iii). Rezultă imediat din (ii). ■

Definiţia 4.3. Fie $\mathfrak{I}=(M_i, u_{ij})$ şi $\mathfrak{I}'=(M_i', u_{ij}')$ două sisteme inductive peste mulţimea filtrantă I. Se numeşte *sistem inductiv de morfisme* de la $\mathfrak{I}$ la $\mathfrak{I}'$ (sau *morfism de sisteme inductive*) o familie $(f_i)_{i\in I}$ de morfisme de A-module cu $f_i:M_i\to M_i'$ a.î. pentru orice pereche (i, j) de elemente din I cu $i\leq j$ diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "u_{ij}"'] & M_i' \arrow[d, "u_{ij}'"] \\
M_j \arrow[r, "f_j"] & M_j'
\end{tikzcd}$$

este comutativă, adică $f_j \circ u_{ij} = u_{ij}' \circ f_i$.

Fie $M = \coprod_{i \in I} M_i$, $M' = \coprod_{i \in I} M_i'$ iar $L \subseteq M$, $L' \subseteq M'$ submodulele puse în evidență în demonstrația Teoremei 4.1. pentru care $\varinjlim_{i \in I} M_i = M / L \overset{not}{=} \overline{M}$ şi $\varinjlim_{i \in I} M_i' = M' / L' \overset{not}{=} \overline{M}'$.

În cadrul §3. am definit $f = \coprod_{i \in I} f_i : M \to M'$ astfel: dacă $x = (x_i)_{i \in I} \in \coprod_{i \in I} M_i$ cu *supp*(x) finită, atunci $f(x) = (f_i(x_i))_{i \in I}$.

Pentru fiecare $i \in I$ să considerăm în $\mathbf{Mod_s(A)}$ diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & M_i' \arrow[d, "\alpha_i'"] \\
M \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, "p"'] & M' \arrow[d, "p'"] \\
\overline{M} \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] & \overline{M}'
\end{tikzcd}$$

unde p şi p' sunt epimorfismele canonice iar α_i şi α_i' sunt monomorfismele canonice de la suma directă.

Dacă $x \in M$ este de forma $x=\alpha_i(x_i)-\alpha_j(u_{ij}(x_i))$ cu $i \leq j$, $x_i \in M_i$, atunci $f(x)=(f \circ \alpha_i)(x_i)-(f \circ \alpha_j)(u_{ij}(x_i))=(\alpha_i' \circ f_i)(x_i)-(\alpha_j' \circ f_j)(u_{ij}(x_i))=\alpha_i'(f_i(x_i))-$-$\alpha_j'[(f_j \circ u_{ij})(x_i)]=\alpha_i'(f_i(x_i)-\alpha_j'[(u_{ij}' \circ f_i)(x_i)]=\alpha_i'(f_i(x_i))-\alpha_j'(u_{ij}'(f_i(x_i)))$, de unde concluzia că $f(L) \subseteq L'$. Atunci există un unic morfism de A-module $\bar{f} : \overline{M} \to \overline{M}'$ a.î. $\bar{f} \circ p=p' \circ f$ (de fapt $\bar{f}(p(x))=p'(f(x))$, pentru orice $x \in M$).

Definiția 4.4. Morfismul $\bar{f}$ definit mai sus se notează prin $\bar{f} = \varinjlim_{i \in I} f_i$ şi poartă numele de *limita inductivă* a sistemului inductiv de morfisme $(f_i)_{i \in I}$. Dacă notăm ca mai înainte $\varepsilon_i=p \circ \alpha_i$ şi $\varepsilon_i'=p' \circ \alpha_i'$, atunci în mod evident pentru orice $i \in I$, diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\varepsilon_i"'] & M_i' \arrow[d, "\varepsilon_i'"] \\
\overline{M} \arrow[r, "\bar{f}"] & \overline{M}'
\end{tikzcd}$$

este comutativă, adică $\bar{f}\circ\varepsilon_i=\varepsilon_i'\circ f_i$.

Fie acum $\mathfrak{I}=(M_i, u_{ij})$, $\mathfrak{I}'=(M_i', u_{ij}')$ şi $\mathfrak{I}''=(M_i'', u_{ij}'')$ trei sisteme inductive de module peste aceeaşi mulţime filtrantă I şi $(f_i)_{i\in I}$, $(g_i)_{i\in I}$ două sisteme inductive de morfisme de la $\mathfrak{I}'$ la $\mathfrak{I}$ şi respectiv de la $\mathfrak{I}$ la $\mathfrak{I}''$.

Notăm $\bar{f}=\varinjlim_{i\in I} f_i$ şi $\bar{g}=\varinjlim_{i\in I} g_i$ (unde $f=\coprod_{i\in I} f_i$, $g=\coprod_{i\in I} g_i$).

Propoziţia 4.5. Dacă pentru orice $i\in I$ şirul:

$$0\longrightarrow M_i' \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{g_i} M_i'' \longrightarrow 0$$

este exact, atunci şi şirul:

$$0\longrightarrow \varinjlim_{i\in I} M_i' \xrightarrow{\bar{f}} \varinjlim_{i\in I} M_i \xrightarrow{\bar{g}} \varinjlim_{i\in I} M_i'' \longrightarrow 0$$

este exact.

Demonstraţie .Fie $M=\coprod_{i\in I} M_i$, $M'=\coprod_{i\in I} M_i'$, $M''=\coprod_{i\in I} M_i''$,

$$\varinjlim_{i\in I} M_i = M/L \overset{not}{=} \overline{M}, \qquad \varinjlim_{i\in I} M_i' = M'/L' \overset{not}{=} \overline{M}', \qquad \varinjlim_{i\in I} M_i'' = M''/L'' \overset{not}{=} \overline{M}''$$

($L\subseteq M$, $L'\subseteq M'$, $L''\subseteq M''$ submodulele lui M, M′ şi respectiv M″ ce definesc limita inductivă).

Trebuie să probăm exactitatea şirului:

$(\star)$ $$0\longrightarrow \overline{M}' \xrightarrow{\bar{f}} \overline{M} \xrightarrow{\bar{g}} \overline{M}'' \longrightarrow 0$$

în $\overline{M}$, $\overline{M}'$ şi $\overline{M}''$.

Să considerăm diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p'"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "p''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{M}' \arrow[r, "\bar{f}"'] & \overline{M} \arrow[r, "\bar{g}"'] & \overline{M}'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

în care primul şir este exact în M', M şi M'' (conform Propoziţiei 3.4.) iar p', p şi p'' sunt epimorfismele canonice.

Dacă $y''\in \overline{M}''$, $y''=p''(x'')$ cu $x''\in M''$ şi cum g este epimorfism, $x''=g(x)$ cu $x\in M$. Din $p''\circ g=\bar{g}\circ p$ deducem că $\bar{g}(p(x))=p''(g(x))=p''(x'')=y''$, adică $\bar{g}$ este epimorfism şi deci şirul $(\star)$ este exact în $\overline{M}''$.

Pentru a arăta exactitatea şirului $(\star)$ în $\overline{M}$ să arătăm că $Ker(\bar{g})=Im(\bar{f})$.

Deoarece $g_i\circ f_i=0$ pentru orice $i\in I$, deducem că $g\circ f=0$, deci $\bar{g}\circ\bar{f}=0$, de unde incluziunea $Im(\bar{f})\subseteq Ker(\bar{g})$.

Pentru a proba incluziunea inversă, fie $\bar{x}\in Ker(\bar{g})$; conform Corolarului 4.2. i), există $i\in I$ şi $x_i\in M_i$ a.î. $\bar{x}=\varepsilon_i(x_i)$. Din $\varepsilon_i''\circ g_i=\bar{g}\circ\varepsilon_i$ deducem că $\varepsilon_i''(g_i(x_i))=\bar{g}(\varepsilon_i(x_i))=\bar{g}(\bar{x})=0$, iar tot din Corolarul 4.2. ii) deducem că există $j\in I$, $j\leq i$ şi $u_{ij}''(g_i(x_i))=0 \Rightarrow g_j(u_{ij}(x_i))=0 \Rightarrow u_{ij}(x_i)\in Ker(g_j)=Im(f_j)$. Deducem că există $x_j'\in M_j'$ a.î. $u_{ij}(x_i)=f_j(x_j')$, astfel că $\bar{x}=\varepsilon_i(x_i)=\varepsilon_j(u_{ij}(x_i))=\varepsilon_j(f_j(x_j'))=\bar{f}(\varepsilon_j'(x_j')$, adică $\bar{x}\in Im(\bar{f})$, deci $Ker(\bar{g})\subseteq Im(\bar{f})$, de unde egalitatea $Ker(\bar{g})=Im(\bar{f})$, adică şirul $(\star)$ este exact în $\overline{M}$.

A proba exactitatea şirului $(\star)$ în $\overline{M}'$ revine la a demonstra că $\bar{f}$ este monomorfism iar pentru aceasta fie $\bar{x}'\in\overline{M}'$ a.î. $\bar{f}(\bar{x}')=0$. Conform Corolarului 4.2. (i), există $i\in I$ şi $x_i'\in M_i'$ a.î. $\bar{x}'=\varepsilon_i'(x_i')$ astfel că obţinem $\bar{f}(\varepsilon_i'(x_i'))=0\Rightarrow(\bar{f}\circ\varepsilon_i')(x_i')=0\Rightarrow(\varepsilon_i\circ f_i)(x_i')=0\Rightarrow\varepsilon_i(f_i(x_i'))=0$.

Conform Corolarul 4.2. (ii), există $j\in I$, $i\leq j$ a.î. $u_{ij}(f_i(x_i'))=0\Rightarrow (u_{ij}\circ f_i)(x_i')=0\Rightarrow f_i(x_i')=0\Rightarrow x_i'=0$ (căci f_i este monomorfism) $\Rightarrow \bar{x}'=\varepsilon_i'(0)=0$, adică $\bar{f}$ este monomorfism şi astfel demonstrația este încheiată. ■

Teorema 4.6. Orice sistem proiectiv de A-module peste mulțimea I are limită proiectivă.

Demonstrație. Reamintim (vezi Capitolul 5, §7) că prin *sistem proiectiv* de A-module peste mulțimea filtrantă $(I, \leq)$ înțelegem o familie $(M_i)_{i\in I}$ de A-module împreună cu morfismele $u_{ij}:M_j\rightarrow M_i$ definite pentru orice pereche (i, j) cu $i\leq j$ a.î. $u_{ii}=1_{M_i}$ pentru orice $i\in I$ şi $u_{ij}\circ u_{jk}=u_{ik}$ pentru orice $i\leq j\leq k$.

Analog ca în cazul sistemelor inductive, un sistem proiectiv se va nota mai simplu $\wp=(M_i, u_{ij})$.

Fie $M=\prod_{i\in I} M_i$ (vezi Propoziția 3.1.) iar

$$\overline{M}=\{x=(x_i)_{i\in I}\in M \mid u_{ij}(x_j)=x_i \text{ pentru orice pereche } (i, j) \text{ cu } i\leq j\}.$$

Se vefifică imediat că $\overline{M}$ este submodul al lui M. Dacă pentru orice $i\in I$, $p_i:M\rightarrow M_i$ este proiecția canonocă de indice i, să notăm prin q_i restricția lui p_i la $\overline{M}$.

Vom demonstra că $\left(\overline{M},(q_i)_{i\in I}\right)=\varprojlim_{i\in I} M_i$.

Din felul în care am definit pe $\overline{M}$ deducem imediat că pentru orice pereche (i, j), cu $i\leq j$, avem $u_{ij}\circ q_j=q_i$.

Fie acum M' un alt A-modul şi $(q_i')_{i\in I}$ o familie oarecare de morfisme de A-module cu $q_i':M'\rightarrow M_i$ pentru orice $i\in I$ a.î. pentru orice pereche (i, j), cu $i\leq j$ să avem $u_{ij}\circ q_j'=q_i'$.

$$
\begin{tikzcd}
 & M \arrow[ddl, "p_j"'] \arrow[ddr, "p_i"] & \\
\overline{M} \arrow[ur, hook] \arrow[d, "q_j"'] \arrow[drr, "q_i"' near end] & & M' \arrow[ul, "u"'] \arrow[d, "q_i'"] \arrow[dll, "q_j'" near end] \\
M_j \arrow[rr, "u_{ij}"'] & & M_i
\end{tikzcd}
$$

Conform proprietății de universalitate a produsului direct de A-module, există un unic morfism de A-module $u:M'\to M$ a.î. $p_j \circ u = q_j'$ pentru orice $j\in I$.

Ținând cont de Propoziția 3.1., u se defineşte pentru $x\in M'$ prin $u(x)=(q_i'(x))_{i\in I}$.

Dacă $i, j\in I$ şi $i\leq j$, din $u_{ij}\circ q_j'=q_i'$ deducem că pentru $x\in M'$ avem $u_{ij}(q_j'(x))=q_i'(x)$, adică $u(x)\in \overline{M}$ şi astfel $u:M'\to \overline{M}$ este unicul morfism de A-module cu proprietatea că $q_j\circ u=q_j'$ pentru orice $j\in I$ şi astfel teorema este demonstrată. ■

Observația 4.7. 1. Morfismele $(q_i)_{i\in I}$ poartă numele de *morfismele canonice* ale limitei proiective.

2. Analog ca în cazul limitelor inductive, dacă nu este pericol de confuzie, prin $\varprojlim_{i\in I} M_i$ vom înțelege doar pe $\overline{M}$ **.**

Definiția 4.8. Fie $\wp=(M_i, u_{ij})$ şi $\wp'=(M_i', u_{ij}')$ două sisteme proiective peste I. Se numeşte *sistem proiectiv de morfisme* de la $\wp$ la $\wp'$ o familie $(f_i)_{i\in I}$ de morfisme de A-module cu $f_i:M_i\to M_i'$ a.î.

pentru orice pereche (i, j) de elemente din I cu i≤j să avem $f_i \circ u_{ij} = u_{ij}' \circ f_j$.

Fie $\varprojlim_{i\in I} M_i \overset{not}{=} \overline{M}$ şi $\varprojlim_{i\in I} M_i' \overset{not}{=} \overline{M}'$ iar $(f_i)_{i\in I}$ un sistem proiectiv de morfisme de la $\wp$ la $\wp'$ unde $M=\prod_{i\in I} M_i$ iar $M'=\prod_{i\in I} M_i'$. Notăm de asemenea $f = \prod_{i\in I} f_i : M \to M'$ (vezi Definiția 3.3.) şi fie $x=(x_i)_{i\in I}\in \overline{M}$. Atunci pentru orice i≤j avem $u_{ij}(x_j)=x_i$. Dacă $x'=f(x)=(f_i(x_i))_{i\in I}$, pentru i≤j avem $u_{ij}'(f_j(x_j)) = (u_{ij}'\circ f_i)(x_j) = (f_i\circ u_{ij})(x_j) = f_i(u_{ij}(x_j)) = f_i(x_i)$, adică $x'=f(x)\in \overline{M}'$.

Definiția 4.9. Morfismul $\bar{f} : \overline{M} \to \overline{M}'$ definit prin $\bar{f}(x)$=f(x) pentru orice x$\in \overline{M}$ se notează prin $\bar{f} = \varprojlim_{i\in I} f_i$ şi poartă numele de *limita proiectivă* a sistemului proiectiv de morfisme de A-module $(f_i)_{i\in I}$.

Se observă imediat că $q_i'\circ \bar{f} = f_i\circ q_i$, pentru orice i∈I, unde $(q_i)_{i\in I}$ şi $(q_i')_{i\in I}$ sunt morfismele canonice de la $\overline{M}$ la M_i, respectiv de la $\overline{M}'$ la M_i'.

Fie acum $\wp=(M_i, u_{ij})$, $\wp'=(M_i', u_{ij}')$ şi $\wp''=(M_i'', u_{ij}'')$ trei sisteme proiective de A-module peste aceeaşi mulțime I iar $(f_i)_{i\in I}$, $(g_i)_{i\in I}$ două sisteme proiective de morfisme de A-module de la $\wp'$ la $\wp$ şi respectiv de la $\wp$ la $\wp''$.

Notăm $\bar{f} = \varprojlim_{i\in I} f_i$ şi $\bar{g} = \varprojlim_{i\in I} g_i$.

Propoziția 4.10. Dacă pentru orice i∈I şirul:

$$0 \longrightarrow M_i' \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{g_i} M_i'' \longrightarrow 0$$

este exact, atunci şi şirul:

$$0 \longrightarrow \overline{M}' \xrightarrow{\bar{f}} \overline{M} \xrightarrow{\bar{g}} \overline{M}'' \longrightarrow 0$$

este exact.

Demonstrație. Totul rezultă imediat din Propoziția 3.4. ținând cont că $\bar{f}$ şi $\bar{g}$ sunt restricțiile lui f şi respectiv g la $\overline{M}$ şi respectiv la $\overline{M}'$. ■

Observația 4.11. Cititorul poate consulta în [17, p.79] un contraexemplu de sistem proiectiv de epimorfisme de A-module a cărui limită proiectivă nu este epimorfism.

În cele ce urmează vom prezenta un rezultat important care în esență ne arată că orice A-modul se poate scrie ca limită inductivă de un anumit tip de A-module (vezi Teoorema 4.14.).

Definiția 4.12. Un A-modul M se zice de *prezentare finită* dacă există un şir exact $L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ cu L_0 şi L_1 A-module libere de tip finit.

Propoziția 4.13. Un A modul M este de prezentare finită dacă şi numai dacă M este de tip finit şi pentru orice şir exact de A module $0 \longrightarrow P \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ cu N de tip finit rezultă că şi P este de tip finit.

Demonstrație. „⇒”. Această implicație este imediată.

„⇐”. Să probăm că M este de prezentare finită. Atunci există şirul exact $L_1 \xrightarrow{h} L_0 \xrightarrow{t} M \longrightarrow 0$ cu L_0 şi L_1 A-module libere de tip finit. Deoarece L_0 este liber, există $\alpha : L_0 \to N$ morfism de A-module a.î. $g \circ \alpha = t$

$$\begin{tikzcd}
 & L_1 \arrow[r, "h"] \arrow[dd, dashed, "\alpha'"'] & L_0 \arrow[dr, "t"] \arrow[dd, dashed, "\alpha"] & & \\
 & & & M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r, "f"] & N \arrow[ur, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

Deoarece $g \circ \alpha \circ h = t \circ h = 0$, există $\alpha' : L_1 \to P$ a.î. $f \circ \alpha' = \alpha \circ h$. Conform Lemei serpentinei (Propoziția 2.29.) avem

$\mathrm{Coker}(\alpha')\approx\mathrm{Coker}(\alpha)$. Cum N este de tip finit, din Corolarul 2.18., deducem că $\mathrm{Coker}(\alpha)$ este de tip finit şi astfel şi $\mathrm{Coker}(\alpha')$ va fi de tip finit. Tot din Corolarul 2.18. deducem imediat că P este de tip finit. ■

Teorema 4.14. Orice A-modul M este limită inductivă a unei familii de A-module de prezentare finită.

Demonstrație. Fie $(g_i)_{i\in I}$ un sistem de generatori pentru M. Conform Corolarului 3.12. există un A-modul liber L de bază $(e_i)_{i\in I}$ şi un şir exact $0\longrightarrow P\xrightarrow{i} L\xrightarrow{p} M\longrightarrow 0$, unde $p(e_i)=g_i$ $(i\in I)$, $P=\mathrm{Ker}(p)$ iar i este incluziunea.

Pentru $J\subseteq I$ vom nota prin L_J submodulul lui L generat de $(e_i)_{i\in J}$.

Fie $K=\{(J, N)\,|\,J\subseteq I$ este finită iar N este un submodul de tip finit al lui $L_J\cap P\}$; definim pe K relația $(J, N)\leq(J', N')\Leftrightarrow J\subseteq J'$ şi $N\subseteq N'$ şi se probează imediat că în felul acesta $(K, \leq)$ devine o mulțime ordonată filtrantă la dreapta (căci dacă (J_1, N_1) şi (J_2, N_2) sunt două elemente din K, atunci din observația că $N_1+N_2\subseteq P$ şi $N_1+N_2\subseteq L_{J_1}+L_{J_2}\subseteq L_{J_1\cup J_2}$, deducem că cele două elemente ale lui K sunt majorate de $(J_1\cup J_2, N_1+N_2)$).

Pentru orice element $k=(J, N)$ al lui K fie $M_k=L_J/N$. Cum $N\subseteq P$, atunci epimorfismul p induce un morfism de A-module $\varphi_k:M_k\to M$ iar dacă $k'=(J', N')$ este un alt element din K cu $k\leq k'$, atunci injecția canonică a lui L_J în $L_{J'}$ induce un morfism de A-module $u_{kk'}:M_k\to M_{k'}$. Deducem imediat că $u_{k'k''}\circ u_{kk'}=u_{kk''}$ şi $\varphi_{k'}\circ u_{kk'}=\varphi_k$ dacă $k\leq k'\leq k''$, astfel că $\mathfrak{I}=(M_k, u_{kk'})$, formează un sistem inductiv.

Fie $\overline{M}=\varinjlim_{k\in K} M_k$. Morfismele φ_k definesc un morfism unic $\varphi:\overline{M}\to M$ a.î. $\varphi\circ\varepsilon_k=\varphi_k$ $(k\in K)$, unde $\varepsilon_k:M_k\to\overline{M}$ sunt morfismele canonice de la limita inductivă. Vom proba că φ este izomorfism de A-module.

Dacă $k=(\{i\}, 0)$, atunci $g_i\in\mathrm{Im}(\varphi_k)$ şi deci $g_i\in\mathrm{Im}(\varphi)$, de unde concluzia că φ este epimorfism. Să arătăm acum că φ este şi monomorfism.

Dacă $y\in \overline{M}$ cu $\varphi(y)=0$, atunci există $k=(J, N)\in K$ a.î. $y=\varepsilon_k(y_k)$ cu $y_k\in M_k$ (vezi Corolarul 4.2.). Avem $\varphi_k(y_k)=0$. Notăm prin $g_{k,i}$ imaginea lui e_i în M_k ($i\in J$). Avem $y_k = \sum_{i\in J} a_i g_{k,i}$. Cum $\varphi_k(y_k)=0$ deducem că $z = \sum_{i\in J} a_i e_i \in P$. Fie $k'=(J, N+Az)$. Deducem că $u_{kk'}(y_k)=0$, deci $y=0$, adică φ este şi monomorfism, deci izomorfism de A-module. Cum fiecare M_k ($k\in K$) este de prezentare finită, teorema este încheiată. ∎

§5. Submodule esenţiale şi superflue. Submodule complement. Submodule închise. Module injective. Grupuri divizibile. Anvelope injective. Module proiective. Anvelope proiective. Generatori, cogeneratori pentru $\mathbf{Mod}_s(A)$.

În cadrul acestui paragraf prin M vom desemna un A-modul stâng. Reamintim că prin $\mathbf{L_A}(M)$ am notat laticea submodulelor lui M (vezi §1.) iar prin **0** submodulul nul al lui M.

Definiţia 5.1. Un submodul N al lui M se zice

(i) *Esenţial în M* (sau că *M este o extensie esenţială a lui N*) dacă pentru orice $N'\in L_A(M)$, $N'\neq 0$ avem $N\cap N'\neq 0$.

(ii) *Superflu* (sau *mic*) dacă pentru orice $N'\in L_A(M)$ pentru care $N+N'=M$ să rezulte $M=N$.

Se observă imediat că $N\in \mathbf{L_A}(M)$ este esenţial în M dacă şi numai dacă pentru orice $x\in M$, $x\neq 0$ există $a\in A$ a.î. $ax\in N$ şi $ax\neq 0$.

Definiţia 5.2. Un monomorfism de A-module $f:M\to N$ se zice *esenţial* dacă Im(f) este esenţial în N iar un epimorfism de A-module $f:M\to N$ se zice *superflu* dacă Ker(f) este superflu în M.

Propoziția 5.3. Pentru $N \in L_A(M)$ următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) N este esențial în M

(ii) Incluziunea $i_N: N \to M$ este monomorfism esențial

(iii) Dacă P este un alt A-modul stâng şi $f: M \to P$ este un morfism de A-module a.î. $f \circ i_N$ este monomorfism în $Mod_s(A)$, atunci f este monomorfism în $Mod_s(A)$.

Demonstrație. (i)$\Leftrightarrow$(ii). Evident.

(i)$\Rightarrow$(iii). Avem că $Ker(f \circ i_N) = Ker(f) \cap N$ şi deci dacă presupunem că $f \circ i_N$ este monomorfism, atunci $Ker(f \circ i_N) = \mathbf{0}$, deci $Ker(f) \cap N = \mathbf{0}$ şi cum N este esențial în M deducem că $Ker(f) = \mathbf{0}$, adică f este monomorfism.

(iii)$\Rightarrow$(i). Fie $N' \in \mathbf{L_A}(M)$, $N' \neq \mathbf{0}$ a.î. $N \cap N' = \mathbf{0}$ iar $p_{N'}: M \to M/N'$ epimorfismul canonic. Din $N \cap N' = \mathbf{0}$ deducem că $p_{N'} \circ i_N$ este monomorfism. Atunci trebuie ca $p_{N'}$ să fie monomorfism, adică $N' = Ker(p_{N'}) = \mathbf{0}$. ■

Corolar 5.4. Un monomorfism $f: N \to M$ este esențial dacă şi numai dacă pentru orice A-modul stâng P şi $g: M \to P$ morfism de A-module, din $g \circ f$ monomorfism deducem că g este monomorfism.

Dual se demonstrează următoarele rezultate pentru module superflue:

Propoziția 5.5. Pentru $P \in L_A(M)$ următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) P este superflu în M

(ii) Epimorfismul canonic $p: M \to M/P$ este superflu

(iii) Dacă L este un alt A-modul stâng şi $f: L \to M$ este un morfism de A-module a.î. $p \circ f$ este epimorfism în $Mod_s(A)$, atunci f este epimorfism în $Mod_s(A)$.

Corolar 5.6. Un epimorfism de A-module $f:M \to N$ este superflu dacă şi numai dacă pentru orice A-modul P şi $g:P \to M$ morfism de A-module, din $f \circ g$ epimorfism deducem că g este epimorfism.

Propoziţia 5.7. Fie $f:N \to M$ şi $g:M \to P$ două monomorfisme de A-module. Atunci $g \circ f$ este monomorfism esenţial dacă şi numai dacă g şi f sunt esenţiale.

Demonstraţie.„$\Leftarrow$". Ne vom folosi de Corolarul 5.4. pentru a demonstra că $g \circ f$ este esenţial iar pentru aceasta fie Q un alt A-modul şi $h:P \to Q$ un morfism de A-module a.î. $h \circ (g \circ f)$ este monomorfism. Deducem că $(h \circ g) \circ f$ este monomorfism şi cum f este esenţial rezultă că $h \circ g$ este monomorfism şi cum g este esenţial deducem că h este monomorfism, adică $g \circ f$ este esenţial.

„$\Rightarrow$". Să presupunem deci că $g \circ f$ este esenţial şi să deducem că f şi g sunt esenţiale.

Fie deci $y \in M$, $y \neq 0$; cum g este monomorfism deducem că $g(y) \neq 0$, deci există $a \in A$ a.î. $ag(y) \neq 0$ şi $ag(y) \in Im(g \circ f)$, adică există $x \in N$ a.î. $ag(y) = (g \circ f)(x) \Rightarrow g(ay) = g(f(x)) \Rightarrow ay = f(x)$, de unde deducem că f este esenţial. Pentru a proba că şi g este esenţial, fie $z \in P$, $z \neq 0$. Deducem că există $a \in A$ a.î. $az \neq 0$ şi $az \in Im(g \circ f) \subseteq Im(g)$, de unde concluzia că g este esenţial.■

Dual se demonstrează:

Propoziţia 5.8. Fie $f:N \to M$ şi $g:M \to P$ epimorfisme de A-module. Atunci $g \circ f$ este epimorfism superflu dacă şi numai dacă g şi f sunt superflue.

Următorul rezultat este imediat:

Corolar 5.9. Fie M un A-modul iar N, P submodule ale sale. Atunci:

(i) $N\cap P$ este esențial în M dacă şi numai dacă N şi P sunt esențiale în M

(ii) $N+P$ este superflu în M dacă şi numai dacă N şi P sunt superflue în M.

Propoziția 5.10. Fie M un A-modul iar N un submodul al său. Atunci există un submodul P al lui M a.î. $N\subseteq P\subseteq M$ iar P este o extensie esențială maximală a lui N conținută în M.

Demonstrație. Fie $\wp=\{Q\in \mathbf{L_A}(M) \mid N\subseteq Q\subseteq M$ iar Q este o extensie esențială a lui N$\}$. Deoarece $N\in\wp$ deducem că $\wp\neq\emptyset$. Să arătăm că $(\wp, \subseteq)$ este inductivă iar pentru aceasta fie $(Q_i)_{i\in I}$ o familie total ordonată de elemente din $\wp$. În mod evident $Q=\bigcup_{i\in I} Q_i \in \mathbf{L_A}(M)$ iar $N\subseteq Q\subseteq M$.

Fie acum $x\in Q$, $x\neq 0$; există $i\in I$ a.î. $x\in Q_i$ şi cum Q_i este extensie esențială a lui N deducem că există $a\in A$ a.î. $ax\neq 0$ şi $ax\in N$ ceea ce ne arată că Q este o extensie esențială a lui N ce majorează elementele familiei $(Q_i)_{i\in I}$.

Totul rezultă acum din Lema lui Zorn. ■

Definiția 5.11. Fie M un A-modul şi $N\in L_A(M)$. Un submodul $N^*\in L_A(M)$ se zice *complement al lui N în M* dacă N^* este complement al lui N în laticea $(L_A(M), \subseteq)$, adică:

$$N^*=\max\{K\in L_A(M) \mid K\cap N=0\}.$$

Un submodul K al lui M se zice *submodul complement al lui M* dacă există $N\in L_A(M)$ a.î. K este complement al lui N în M.

Pentru $N\in \mathbf{L_A}(M)$, existența unui complement al lui N în M ne este asigurată de Lema lui Zorn. Deducem imediat că **0** şi M sunt submodule complement ale lui M.

Propoziţia 5.12. Fie $N \in \mathbf{L}_A(M)$ iar N^* un complement al lui N în M. În aceste condiţii există un complement Q al lui N^* în M a.î. $N \subseteq Q$ şi care este extensie esenţială maximală a lui N în M.

Demonstraţie. Deoarece $N \cap N^* = \mathbf{0}$, existenţa unui complement Q al lui N^* în M a.î. $N \subseteq Q$ ne este asigurată de Lema lui Zorn. Să arătăm acum că Q este extensie esenţială maximală a lui N în M iar pentru aceasta fie $L \in \mathbf{L}_A(Q)$ a.î. $L \neq \mathbf{0}$ şi $L \cap N = \mathbf{0}$.

Alegând $P = L + N^*$ este clar că $N^* \subset P$ şi să arătăm că $N \cap P = \mathbf{0}$. Dacă $x \in N \cap P$, atunci $x \in N$ şi $x = y + z$ cu $y \in L$ şi $z \in N^*$.

Deoarece $z = x - y \in Q$ şi $Q \cap N^* = \mathbf{0}$ deducem că $z = 0$, adică $x = y \in L \cap N = \mathbf{0}$, deci $x = y = 0$, adică $N \cap P = \mathbf{0}$, contrazicând faptul că N^* este un complement al lui N în M. Deci, cu necesitate $L \cap N \neq \mathbf{0}$, adică Q este extensie esenţială a lui N în M. Pentru a arăta că această extensie este maximală, fie $Q' \in \mathbf{L}_A(M)$ a.î. $N \subseteq Q \subset Q'$ este extensie esenţială a lui N. Evident $Q' \cap N^* \neq \mathbf{0}$, şi cum $N \cap (Q' \cap N^*) = \mathbf{0}$ iar $Q' \cap N^* \subset Q'$ deducem că Q' nu este extensie esenţială a lui N –absurd!. ■

Definiţia 5.13. Un submodul $N \in \mathbf{L}_A(M)$ se zice *închis* dacă nu are extensii esenţiale proprii în M.

Din Propoziţia 5.12. deducem imediat că orice submodul închis al lui M este submodul complement al lui M. Să arătăm că submodulele complement ale lui M coincid cu submodulele închise ale lui M iar pentru aceasta fie K un submodul complement al lui M şi să arătăm că K este închis.

Există deci $N \in \mathbf{L}_A(M)$ a.î. K este complement al lui N în M. Conform Lemei lui Zorn, există un complement L al lui K a.î. $N \subseteq L$. Dacă Q este un complement al lui L ce conţine pe K, cum $L \cap K = \mathbf{0}$, deducem $K = Q$. Aplicând din nou Propoziţia 5.12. deducem că K este submodul închis în M.

Din cele de mai înainte deducem imediat:

Corolar 5.14. Submodulele complement ale lui M coincid cu submodulele închise ale lui M.

Propoziția 5.15. Fie $N \in L_A(M)$ iar N' un complement al lui N în M. Atunci:

(i) $N+N'$ este esențial în M

(ii) Morfismul canonic $p:N \to M/N'$, $p(x)=x+N'$ pentru orice $x \in N$ este un monomorfism esențial.

Demonstrație. (i). Fie $x \in M$, $x \neq 0$ şi să demonstrăm că există $a \in A$ a.î. $ax \neq 0$ şi $ax \in N+N'$. Dacă $x \in N'$, atunci $N'+Ax \neq N'$ şi deci $N \cap (N'+Ax) \neq \mathbf{0}$.

Fie $y \in N \cap (N'+Ax)$, $y \neq 0$. Cum $y \in N'+Ax$, $y=z+ax$ cu $z \in N'$şi $a \in A$. Dacă $ax=0$ atunci $y=z$ şi cum $N \cap N'=\mathbf{0}$ ar rezulta $y=0$ –absurd!. Deci $ax \neq 0$ şi din $ax=y-z$ deducem $ax \in N+N'$ adică $N+N'$ este esențial în M.

(ii). Dacă x', $x'' \in N$ a.î. $p(x')=p(x'')$, atunci $x'+N'=x''+N'$, deci $x'-x'' \in N'$. Cum $x'-x'' \in N$ deducem că $x'-x'' \in N' \cap N=\mathbf{0}$, adică $x'=x''$, deci p este monomorfism.

Evident $Im(p)=(N+N')/N'$ şi fie L/N' un submodul al lui M/N' nenul. Avem $(N+N')/N' \cap L/N'=((N+N') \cap L)/N'=((N \cap L)+N'/N') \neq \mathbf{0}$ (deoarece $N \cap L \neq \mathbf{0}$), ceea ce ne arată că monomorfismul p este esențial.■

Definiția 5.16. $Q \in Mod_s(A)$ se zice A-*modul injectiv* dacă pentru orice diagramă din $Mod_s(A)$ de forma:

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "f"'] & & M \arrow[dl, dashed, "f'"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

cu u monomorfism există un morfism de A-module $f':M \to Q$ a.î. $f' \circ u=f$.

Dacă nu este pericol de confuzie, în loc de *A-modul injectiv* (vezi Capitolul 5, § 9) vom spune simplu *modul injectiv* iar în loc de morfism de A-module vom spune morfism.

Observația 5.17. Deoarece în **Mod$_s$(A)** monomorfismele coincid cu morfismele injective (conform Teoremei 2.7.), în definiția modulelor injective putem presupune că M' este submodul al lui M.

Propoziția 5.18. Dacă $(M_i)_{i\in I}$ este o familie de A-module stângi atunci $\prod_{i\in I} M_i$ este A-modul injectiv dacă şi numai dacă pentru orice $i\in I$ M_i este A-modul injectiv.

Demonstrație. „$\Rightarrow$”. Considerăm $i\in I$ şi diagrama din **Mod$_s$(A)**:

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "f"'] & & M \\
& M_i &
\end{tikzcd}$$

cu u monomorfism. Pentru fiecare $i\in I$ din M_i în $P=\prod_{i\in I} M_i$ considerăm morfismul canonic $\alpha_i:M_i \to \prod_{i\in I} M_i$ (vezi §3.) obținând diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "f"'] & & M \arrow[dl, dashed, "p_i\circ g"'] \arrow[dd, dashed, "g"] \\
& M_i \arrow[dr, shift right, "\alpha_i"'] & \\
& & P \arrow[ul, dashed, shift right, "p_i"']
\end{tikzcd}$$

Cum am presupus că P este injectiv, există $g:M\to P$ a.î. $g\circ u=\alpha_i\circ f$. Considerând acum şi morfismul canonic $p_i:P\to M_i$ (vezi §3.) deoarece $(p_i\circ g)\circ u=p_i\circ(g\circ u)=p_i\circ(\alpha_i\circ f)=(p_i\circ\alpha_i)\circ f=1_{M_i}\circ f=f$ deducem că P este modul injectiv.

„⇐”. Această implicaţie este valabilă în general într-o categorie $\mathfrak{C}$ (vezi Capitolul 5, §7) şi se demonstrază standard, în sensul că se consideră diagrama din **Mod$_s$(A)**:

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "f"'] & & M \arrow[dl, dashed, "f'"'] \arrow[dd, dashed, "f_i"] \\
& P \arrow[dr, "p_i"] & \\
& & M_i
\end{tikzcd}$$

cu u monomorfism, $P=\prod_{i\in I} M_i$ iar p_i:P→M_i proiecţia de indice i. Deoarece M_i este modul injectiv există f_i:M→M_i a.î. $f_i\circ u=p_i\circ f$.

Din proprietatea de universalitate a produsului direct deducem că există un unic morfism f':M→P a.î. $p_i\circ f'=f_i$ pentru orice i∈I.

Avem $p_i\circ(f'\circ u)=(p_i\circ f')\circ u=f_i\circ u=p_i\circ f$ şi cum p_i este epimorfism deducem că $f'\circ u=f$, adică P este modul injectiv. ■

Propoziţia 5.19. Dacă Q∈Mod$_s$(A) este injectiv atunci functorul h$_Q$: Mod$_s$(A)→Ab duce şiruri exacte scurte în şiruri exacte scurte.

Demonstraţie. Fie $0\longrightarrow M'\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}M''\longrightarrow 0$ un şir exact de A-module din **Mod$_s$(A)** (adică f este monomorfism, g epimorfism iar Ker(g)=Im(f)).

Trebuie să demonstrăm că şirul scurt:

$$0\longrightarrow h_Q(M'')\xrightarrow{h_Q(g)}h_Q(M)\xrightarrow{h_Q(f)}h_Q(M')\longrightarrow 0$$

este un şir exact în **Ab**.

Reamintim că de exemplu $h_Q(M)$=**Hom**$_A$(M, Q) iar pentru $\alpha\in h_Q(M'')$=**Hom**$_A$(M″, Q), $h_Q(g)(\alpha)=\alpha\circ g$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] \arrow[dl, "\alpha"] & 0 \\
 & & Q & &
\end{tikzcd}$$

Dacă $\alpha \in Ker(h_Q(g))$, atunci $\alpha \circ g=0$. Deoarece g este epimorfism, pentru $y \in M''$ găsim $x \in M$ a.î. $y=g(x)$. Atunci $\alpha(y)=\alpha(g(x))=(\alpha \circ g)(x)=0$ adică $\alpha=0$ şi deci $h_Q(g)$ este monomorfism.

Să arătăm acum că $h_Q(f)$ este epimorfism în **Ab** (morfism surjectiv) iar pentru aceasta fie $\beta \in h_Q(M')$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "\beta"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[dr, dotted, "\alpha"] & M'' \arrow[r] & 0 \\
 & & & Q &
\end{tikzcd}$$

Deoarece Q este injectiv există un morfism $\alpha:M \to Q$ a.î. $\alpha \circ f=\beta \Leftrightarrow h_Q(f)(\alpha)=\beta$, de unde concluzia că $h_Q(f)$ este epimorfism în **Ab**.

Mai avem de probat că $Ker(h_Q(f))=Im(h_Q(g))$.

Deoarece $g \circ f=0$ deducem că pentru orice $\alpha \in h_Q(M'')$, $(h_Q(g) \circ h_Q(f))(\alpha)=h_Q(g)(h_Q(f)(\alpha))=h_Q(f)(\alpha) \circ g=(\alpha \circ f) \circ g=\alpha \circ (f \circ g)=0$, de unde incluziunea $Im(h_Q(g)) \subseteq Ker(h_Q(f))$.

Pentru cealaltă incluziune, fie $\beta \in Ker(h_Q(f))$, adică $\beta:M \to Q$ şi $\beta \circ f=0$. Trebuie să construim $\alpha:M'' \to Q$ a.î. $\alpha \circ g=\beta$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & M'' \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\alpha"] & 0 \\
 & & Q & &
\end{tikzcd}$$

Fie deci $y \in M''$; cum g este surjecţie există $x \in M$ a.î. $y=g(x)$. Dacă mai avem $x' \in M$ a.î. $y=g(x')$ atunci $g(x)=g(x') \Leftrightarrow x-x' \in Ker(g)=Im(f)$, adică există $z \in M'$ a.î. $x-x'=f(z)$.

Deducem imediat că $\beta(x-x')=\beta(f(z))=(\beta\circ f)(z)=0$, adică $\beta(x)=\beta(x')$.

Acest lucru ne permite să definim $\alpha:M''\to Q$ prin $\alpha(y)=\beta(x)$. Se verifică imediat că α este morfismul căutat şi astfel propoziţia este complet demonstrată (vezi şi Propoziţia 2.34, (ii).)■

Propoziţia 5.20. Pentru $Q\in Mod_s(A)$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) Q este modul injectiv

(ii) Pentru orice $M\in Mod_s(A)$, orice $M'\in L_A(M)$ esenţial în M şi orice morfism $f:M'\to Q$ există un morfism $g:M\to Q$ a.î. $g_{|M'}=f$.

Demonstraţie. (i)⇒(ii). este evidentă.

(ii)⇒(i). Fie $N\in \mathbf{L_A}(M)$ şi $f:N\to Q$ un morfism de A-module. Dacă N^* este un complement al lui N în M atunci $N+N^*$ este esenţial în M (conform Propoziţiei 5.15.). Cum $N\cap N^*=0$ există $h:N+N^*\to Q$ a.î. $h_{|N}=f$ şi $h_{|N^*}=0$. Există atunci $g:M\to Q$ a.î. $g_{|N+N^*}=h$ şi deci $g_{|N}=f$. ■

Teorema 5.21. ***(Testul de injectivitate al lui Baer)*** **Pentru $Q\in Mod_s(A)$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:**

(i) Q este A-modul injectiv

(ii) Pentru orice ideal stâng $I\subseteq A$ şi orice morfism de A-module $f:I\to Q$ există $q\in Q$ a.î. $f(x)=xq$ pentru orice $x\in I$.

Demonstraţie. (i)⇒(ii). Cum I este în particular submodul al lui A, în ipoteza că Q este A-modul injectiv pentru $f:I\to Q$ există $f':A\to Q$ a.î. $f'_{|I}=f$. Dacă notăm $q=f'(1)\in Q$, atunci pentru $x\in I$, $f(x)=f'(x)=xf'(1)=xq$.

(ii)⇒(i). Fie M, $M'\in$ **$Mod_s(A)$** a.î. $M\subseteq M'$ este submodul iar $f:M\to Q$ un morfism de A-module. Trebuie să găsim un $f':M'\to Q$ morfism de A-module a.î. $f'_{|M}=f$.

Pentru aceasta considerăm mulţimea

$$\wp=\{(N, f')\mid M\le N\le M',\ f'\in \mathbf{Hom}_A(N, Q)\ \text{şi}\ f'_{|M}=f\}.$$

(unde prin $M \leq N$ am desemnat faptul că N este un element din **Mod$_s$(A)** ce conține pe M ca submodul).

În mod evident $(M, f) \in \wp$ astfel că $\wp \neq \emptyset$. Pe $\wp$ definim relația binară $(N', f') \leq (N'', f'') \Leftrightarrow N' \leq N''$ şi $f''_{|N'} = f'$ şi se verifică imediat că $\leq$ este o relație de ordine pe $\wp$. Să arătăm că $(\wp, \leq)$ este chiar mulțime inductiv ordonată iar pentru aceasta fie $(N_i, f_i)_{i \in I}$ o familie total ordonată de elemente din $\wp$ şi $N = \bigcup_{i \in I} N_i$.

Atunci N este submodul al lui M' şi definind $f': N \to Q$ pentru $x \in N$ prin $f'(x) = f_i(x)$ (dacă $x \in N_i$) atunci în mod evident f' este morfism de A-module şi (N, f') este majorant pentru familia $(N_i, f_i)_{i \in I}$.

Conform Lemei lui Zorn există $(N_0, f_0) \in \wp$ un element maximal. Dacă vom demonstra că $N_0 = M'$ atunci implicația este probată. Să presupunem prin absurd că $N_0 \neq M'$ adică există $x_0 \in M'$ a.î. $x_0 \notin N_0$. Alegem $N_1 = \langle N_0 \cup \{x_0\} \rangle = N_0 + Ax_0$ şi fie idealul stâng $I = \{a \in A \mid ax_0 \in N_0\}$. Se probează imediat că $g: I \to Q$ $g(a) = f_0(ax_0)$ pentru orice $a \in A$ este morfism de A-module. Conform ipotezei există $q \in Q$ a.î. $g(a) = aq$ pentru orice $a \in I$.

Să considerăm acum două elemente $x + ax_0 = x' + a'x_0$, cu x, $x' \in N_0$ iar $a, a' \in A$. Avem că $x - x' = (a' - a)x_0$ şi cum $x - x' \in N_0$ deducem că $a - a' \in I$. Atunci $g(a - a') = f_0((a' - a)x_0) = q(a' - a)$.

Însă $f_0((a' - a)x_0) = f_0(x - x') = f_0(x) - f_0(x')$, de unde egalitatea $f_0(x) - f_0(x') = q(a' - a) = qa' - qa \Leftrightarrow f_0(x) + qa = f_0(x') + qa'$.

Din cele de mai sus deducem că dacă definim $f_1: N_1 \to Q$ prin $f_1(x + ax_0) = f_0(x) + aq$ (pentru $x \in N_1$ şi $a \in A$), atunci f_1 este o funcție corect definită.Se verifică imediat că f_1 este morfism de A-module şi că $f_{1|N_0} = f_0$, adică $(N_0, f_0) < (N_1, f_1)$ –absurd, deoarece se contrazice maximalitatea lui (N_0, f_0). ■

Definiția 5.22. Un grup abelian (G, +) se zice *divizbil* dacă pentru orice n$\in\mathbb{N}^*$ şi orice y$\in$G există x$\in$G a.î. nx=y.

Exemple 1. În mod evident, ($\mathbb{Z}$, +) nu este grup divizibil pe când ($\mathbb{Q}$, +) este grup divizibil.

2. Dacă $p\geq 2$ este un număr prim, atunci notând

$$C_{p^\infty}=\{z\in\mathbb{C} \mid \text{există } n\in\mathbb{N} \text{ a.î. } z^{p^n}=1\},$$

(C_{p^∞}, $\cdot$) este grup divizibil.

Într-adevăr, dacă pentru n$\in\mathbb{N}$ notăm $U_{p^\infty}=\{z\in\mathbb{C} \mid z^{p^n}=1\}$, atunci $C_{p^\infty}=\bigcup_{n\geq 0}U_{p^n}$. Se cunoaşte faptul că pentru orice n$\in\mathbb{N}$ grupul (U_{p^n}, $\cdot$) este ciclic şi deoarece $U_{p^n}\subseteq U_{p^{n+1}}$ putem alege un şir de elemente $(g_n)_{n\geq 0}$ din C_{p^∞} a.î. g_n este generator al lui U_{p^n} şi $g_{n+1}^{p}=g_n$.

Fie acum y$\in C_{p^\infty}$ şi m$\in\mathbb{N}^*$. Atunci există n$\in\mathbb{N}$ a.î. y$\in U_{p^n}$ şi deci y=g_n^k cu $k\geq 0$. Alegem pe m sub forma $m=p^tq$ cu t$\in\mathbb{N}$, q$\in\mathbb{N}^*$ a.î. (p, q)=1. Deducem imediat că $(p^n, q)=1$ adică există α, $\beta\in\mathbb{Z}$ a.î. $\alpha p^n+\beta q=1$.

Deoarece $\left(g_{n+t}^{\beta k}\right)^m=g_{n+t}^{\beta kp^tq}=\left(g_{n+t}^{p^t}\right)^{\beta kq}=g_n^{\beta kq}=\left(g_n^k\right)^{\beta q}=y^{\beta q}=y^{1-p^n\alpha}=y$ deducem că ecuația $x^m=y$ are soluția x=$g_{n+t}^{\beta k}$, adică (C_{p^∞}, $\cdot$) este grup divizibil.

Propoziția 5.23. Orice grup abelian divizibil şi nenul (G, +) conține un subgrup izomorf fie cu ($\mathbb{Q}$, +) fie cu un grup de forma (C_{p^∞}, $\cdot$), cu p prim.

Demonstrație. Fie y$\in$G, y$\neq$0. Dacă o(y)=∞ atunci cum G este divizibil construim un şir de elemente $(y_n)_{n\geq 1}$ din G a.î. $y_1=y$ şi $(n+1)y_{n+1}=y_n$ pentru orice $n\geq 1$. Se arată acum uşor că subgrupul lui G generat de elementele $(y_n)_{n\geq 1}$ este izomorf cu ($\mathbb{Q}$, +).

Dacă o(y)=m, atunci dacă p≥2 este un divizor prim al lui m alegând $y_1=\frac{m}{p}$ y avem că py_1=my=0, adică $o(y_1)$=p. Folosind din nou faptul că (G, +) este divizibil putem construi din nou un şir $(z_n)_{n\geq 1}$ de elemnte din G a.î. $z_1=y_1$ şi $pz_{n+1}=z_n$ pentru orice n≥1 şi se arată uşor că subgrupul lui G generat de elementele $(z_n)_{n\geq 1}$ este izomorf cu $(C_{p^\infty}, \cdot)$.

■

Teorema 5.24. Un grup abelian G (conceput în mod canonic ca ℤ-modul) este injectiv în $\mathbf{Mod}_s(\mathbb{Z})$=Ab dacă şi numai dacă este divizibil.

Demonstrație. „⇒”. Să presupunem că G este injectiv în **Ab** şi fie y∈G iar $n\in\mathbb{N}^*$. Definim f : nℤ→G prin f(nk)=ky pentru orice k∈ℤ şi se arată imediat că f este morfism de grupuri (ℤ-module). Conform Teoremei 5.21. există x∈G a.î. f(nk)=nkx pentru orice k∈ℤ sau ky=nkx; în particular pentru k=1 obținem că y=nx, adică G este divizibil.

„⇐”. Să presupunem acum că G este divizibil şi fie I=nℤ un ideal al lui ℤ iar f:I→G un morfism de grupuri.

Cum G este divizibil există x_0∈G a.î. nx_0=f(n). Dacă t∈I, t=kn (cu k∈ℤ), atunci $f(t)=f(kn)=kf(n)=knx_0=tx_0$ adică G este injectiv în **Ab** (conform Teoremei 5.21.). ■

Propoziția 5.25. (i) Orice sumă directă de grupuri abeliene divizibile este grup divizibil

(ii) Orice grup factor al unui grup abelian divizibil este divizibil.

Demonstrație. (i). Fie $(G_i)_{i\in I}$ o familie de grupuri abeliene divizibile iar $G=\coprod_{i\in I} G_i$. Dacă y∈G şi $n\in\mathbb{N}^*$, atunci $y=(y_i)_{i\in I}$ cu supp(y) finit.

Pentru orice $j \in supp(y)$, există $x_j \in G_j$ a.î. $y_j = nx_j$, astfel că dacă notănm $x=(x_j)_{j\in I}$ atunci $x\in G$ şi $nx=y$, adică G este divizibil.

(ii). Fie G un grup abelian divizibil iar $H \leq G$. Pentru a demonstra că G/H este divizibil fie $\bar{y} = y+H \in G/H$ (cu $y\in G$) şi $n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece G este divizibil există $x\in G$ a.î. $y=nx$. Atunci $\bar{y} = nx+H = n(x+H) = n\bar{x}$, de unde concluzia că G/H este divizibil. ■

Din acest rezultat şi Teorema 5.24. deducem imediat:

Corolar 5.26. (i) Orice sumă directă de $\mathbb{Z}$-module injective este $\mathbb{Z}$-modul injectiv

(ii) Orice grup factor al unui $\mathbb{Z}$-modul injectiv este injectiv.

Fie (G, +) un grup abelian iar

$$\overline{G} = \{f:(A, +)\rightarrow(G, +) \mid f \text{ morfism de grupuri}\}.$$

Definind pentru $f, g \in \overline{G}$ şi $a\in A$, $f+g:A\rightarrow G$ şi $af:A\rightarrow G$ prin $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ şi $(a\cdot f)(x)=f(ax)$ pentru orice $x\in A$, se verifică imediat că în acest fel $\overline{G}$ devine în mod canonic A-modul stâng.

Teorema 5.27. (*Eckmann-Schopf*) Dacă G este un grup abelian divizibil, atunci $\overline{G}$ este A-modul injectiv.

Demonstraţie. Îi vom aplica lui $\overline{G}$ testul de injectivitate al lui Baer (Teorema 5.21.) iar pentru aceasta fie $I \subseteq A$ un ideal şi $f:I\rightarrow \overline{G}$ un morfism de A-module. Acest morfism induce morfismul de $\mathbb{Z}$-module $\bar{f}:I\rightarrow G$ definit prin $\bar{f}(a)=f(a)(1)$ pentru orice $a\in A$.

Cum (G, +) este divizibil (deci $\mathbb{Z}$-modul injectiv) există $g:A\rightarrow G$ morfism de $\mathbb{Z}$-module a.î. $g_{|I} = \bar{f}$. Să arătăm cum că pentru orice $a\in I$ $f(a)=a\cdot g$ iar pentru aceasta fie $b\in A$. Avem $(a\cdot g)(b)=g(ab)=\bar{f}(ab)=f(ab)(1)=(b\cdot f(a))(1)=f(a)(b\cdot 1)=f(a)(b)$, de unde egalitatea $f(a)=a\cdot g$. Conform Teoremei 5.21. deducem că $\overline{G}$ este A-modul injectiv. ■

Corolar 5.28. Pentru orice $M \in \mathbf{Mod}_s(A)$, există un A-modul injectiv Q(M) a.î. $M \in L_A(Q(M))$.

Demonstrație. Deoarece M este în particular $\mathbb{Z}$-modul, conform Corolarului 3.19., există un $\mathbb{Z}$-modul liber de forma $\mathbb{Z}^{(I)}$ şi un morfism surjectiv de $\mathbb{Z}$-module $f:\mathbb{Z}^{(I)} \to M$. Conform Teoremei 2.11. avem izomorfismul de $\mathbb{Z}$-module $M \approx \mathbb{Z}^{(I)}/Ker(f) \subseteq \mathbb{Q}^{(I)}/Ker(f)$ (($\mathbb{Q}$, +) fiind grupul aditiv al numerelor raționale). Dacă notăm $G = \mathbb{Q}^{(I)}/Ker(f)$, atunci G este divizibil (conform Corolarului 5.26.).

Considerăm acum izomorfismul canonic de A-module $M \approx \mathbf{Hom}_A(A, M)$ (ce asociază la fiecare element $x \in M$, $f_x:A \to M$ definit prin $f_x(a) = ax$ pentru orice $x \in A$).

Atunci $M \approx \mathbf{Hom}_A(A, M) \leq \mathbf{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G) = \overline{G}$.

Alegând $Q(M) = \overline{G}$, atunci $M \leq Q(M)$ iar conform Teoremei 5.27, Q(M) este A-modul injectiv. ■

Propoziția 5.29. Dacă Q este un A-modul injectiv atunci orice submodul complement al lui Q este sumand direct în Q.

Demonstrație. Fie K un submodul complement al lui Q (adică un submodul închis în Q, conform Corolarului 5.14.) iar N un complement al lui K în Q. Conform Propoziției 5.15. deducem că (K+N)/N este esențial în Q/N şi fie $g:(K+N)/N \to Q$ morfismul definit în mod canonic $g((x+y)+N) = x$ pentru $x \in K$ şi $y \in N$. Deoarece $K \cap N = \mathbf{0}$ dacă mai avem $x' \in K$ şi $y' \in N$ a.î. $(x+y)+N = (x'+y')+N$, atunci $(x+y)-(x'+y') \in N$ şi cum $y-y' \in N$ deducem că $x-x' \in N \cap K = \mathbf{0}$, adică $x = x'$ şi deci g este corect definită. Rezultă chiar că g este monomorfism şi cum Q este presupus modul injectiv, există $h:Q/N \to Q$ a.î. $h_{|K+N/N} = g$.

Cum (K+N)/N este esențial în Q/N şi g este monomorfism, atunci h este monomorfism.

Însă $K = Im(g) = h((K+N)/N)$ şi $h((K+N)/N)$ este esențial în $h(Q/N)$. Cum h este monomorfism atunci $(K+N)/N = Q/N$, de unde deducem că $Q = K+N$ şi cum $K \cap N = \mathbf{0}$ deducem că $Q = K \oplus N$, adică K este sumand direct în Q. ■

Definiția 5.30. Fie $M \in Mod_s(A)$. Numim *anvelopă injectivă* a lui M, o pereche (Q, i) cu Q modul injectiv iar $i:M \to Q$ monomorfism esențial de A-module.

Teorema 5.31. (*Eckmann-Schopf*) Orice A-modul stâng M admite o anvelopă injectivă unică pînă la un izomorfism de A-module.

Demonstrație. Să probăm la început unicitatea anvelopei injective iar pentru aceasta să presupunem că (Q_1, i_1) şi (Q_2, i_2) sunt două anvelope injective ale lui M.

$$\begin{tikzcd} & Q_1 \arrow[dd, dashed, "f"] \\ M \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & \\ & Q_2 \end{tikzcd}$$

Cum Q_2 este modul injectiv, există $f:Q_1 \to Q_2$ un morfism de A-module a.î. $f \circ i_1 = i_2$. Cum i_1 şi i_2 sunt monomorfisme esențiale deducem că f este monomorfism. Deoarece $Q_1 \approx f(Q_1)$, putem scrie $Q_2 = f(Q_1) \oplus N$ (conform Propoziției 5.29.). Cum $i_2(M) \subseteq f(Q_1)$ şi $i_2(M) \cap N = \mathbf{0}$ deducem că $N = \mathbf{0}$, adică $Q_2 = f(Q_1)$ şi deci f este izomorfism, adică $Q_1 \approx Q_2$.

Să probăm acum existența anvelopei injective a unui A-modul M.

Conform Corolarului 5.28., există un A-modul injectiv $Q = Q(M)$ a.î. M este submodul al lui Q.

Fie acum E un submodul al lui Q ce conține pe M şi este extensie esențială maximală a lui M. Atunci E este un submodul complement în Q (conform Propoziției 5.14.).

Ținând cont de Propoziția 5.28. deducem că E este A-modul injectiv şi deci (E, i), unde i este morfismul incluziune este o anvelopă injectivă a lui M. ■

Noțiunile duale noțiunilor de modul injectiv şi anvelopă injectivă sunt cele de *modul proiectiv* şi *anvelopă proiectivă*.

Definiția 5.32. **$P \in \mathbf{Mod}_s(A)$ se zice *proiectiv* dacă pentru orice două A-module M, M', orice epimorfism $p:M' \to M$ şi orice morfism de A-module $f:P \to M$ există un morfism de A-module $f':P \to M'$ a.î. $p \circ f' = f$ adică diagrama:**

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "f'"'] \arrow[dr, "f"] & \\ M' \arrow[rr, "p"] & & M \end{tikzcd}$$

este comutativă.

Exemple de module proiective ne sunt oferite de:

Propoziția 5.33. Orice A-modul liber este proiectiv.

Demonstrație. Fie L un A-modul liber de bază $(e_i)_{i \in I}$. Dacă în **$\mathbf{Mod}_s(A)$** avem diagrama:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dr, "f"] & \\ M' \arrow[rr, "p"] & & M \end{tikzcd}$$

cu p epimorfism, atunci pentru orice $i \in I$ există $e_i' \in M$ a.î. $f(e_i) = p(e_i')$. Definind pentru e_i pe $f':L \to M'$ prin $f'(e_i) = e_i'$ $(i \in I)$ atunci în mod canonic f' se defineşte prin $f'\left(\sum_{i\in I} a_i e_i\right)=\sum_{i\in I} a_i e_i'$. Se verifică imediat că f' este morfism de A-module şi că $p\circ f'=f$, de unde concluzia că L este proiectiv. ■

Pentru modulele proiective avem un rezultat dual celui stabilit în Propoziția 5.18.:

Propoziția 5.34. Fie $(M_i)_{i\in I}$ o familie de A-module. Atunci $\coprod_{i\in I} M_i$ este modul proiectiv dacă şi numai dacă pentru orice $i\in I$, M_i este proiectiv.

Să probăm acum un rezultat analog celui stabilit în Propoziția 5.19.:

Propoziția 5.35. Dacă $P\in$ Mod$_s$(A) este proiectiv atunci functorul h_P:Mod$_s$(A)$\to$Ab duce şiruri exacte scurte în şiruri exacte scurte.

Demonstrație. Fie $0\longrightarrow M'\xrightarrow{f} M\xrightarrow{g} M''\longrightarrow 0$ un şir exact scurt din **Mod$_s$(A)** şi să demonstrăm că şirul:

$$(\star)\ 0\longrightarrow h^P(M')\xrightarrow{h^P(f)} h^P(M)\xrightarrow{h^P(g)} h^P(M'')\longrightarrow 0$$

este un scurt în **Mod$_s$($\mathbb{Z}$)=Ab** (categoria grupurilor abeliene).

Reamintim definiția lui h^P: dacă $M\in$ **Mod$_s$(A)**, atunci $h^P(M)=$ **Hom**$_A$(P, M) iar dacă mai avem $M'\in$ **Mod$_s$(A)** şi $f\in$ **Hom**$_A$(M, M′), atunci $h^P(f):h^P(M)\to h^P(M')$ se defineşte prin $h^P(f)(\alpha)=f\circ\alpha$ pentru orice $\alpha\in h^P(M)$.

Pentru a arăta exactitatea şirului ($\star$) în $h^P(M')$ fie $\alpha\in h^P(M')$ a.î. $h^P(f)(\alpha)=0 \Leftrightarrow f\circ\alpha=0$. Atunci, pentru orice $x\in P$ avem $f(\alpha(x))=0$ şi cum f este monomorfism deducem că $\alpha(x)=0$, adică $\alpha=0$ şi astfel $\mathrm{Ker}(h^P(f))=0$, deci $h^P(f)$ este monomorfism în **Ab**.

Pentru a proba exactitatea şirului ($\star$) în $h^P(M'')$, fie $\beta\in h^P(M'')$. Atunci să considerăm diagrama din **Mod$_s$(A)**:

$$\begin{tikzcd}
 & & P \arrow[d, dashed, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Cum P este proiectiv iar g este epimorfism, există $\alpha:P\to M$ a.î. $g\circ\alpha=\beta \Leftrightarrow \beta= h^P(g)$, de unde concluzia că $h^P(g)$ este epimorfism adică şirul $(\star)$ este exact în $h^P(M'')$.

Pentru a proba exactitatea şirului $(\star)$ în $h^P(M)$ va trebui să arătăm că $Ker(h^P(g))=Im(h^P(f))$.

Din $g\circ f=\mathbf{0}$ deducem că $(g\circ f)\circ\alpha=\mathbf{0}$ pentru orice $\alpha\in h^P(M)$, adică $g\circ(f\circ\alpha)=\mathbf{0}$, de unde incluziunea $Im(h^P(f))\subseteq Ker(h^P(g))$.

Fie acum $\alpha\in Ker(h^P(g)) \Leftrightarrow g\circ\alpha=\mathbf{0}$:

$$\begin{tikzcd}
 & & & P \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dll, dashed, bend right=15, "\beta"'] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Atunci pentru $x\in P$, $g(\alpha(x))=0 \Leftrightarrow \alpha(x)\in Ker(g)=Im(f)$, deci există un unic $z\in M'$ a.î. $\alpha(x)=f(z)$.

Se verifică imediat că definind $\beta(x)=z$ obţinem un morfism de A-module $\beta:P\to M'$ a.î. $f\circ\beta=\alpha$, deci $\alpha= h^P(\beta)$, adică este valabilă şi incluziunea $Ker(h^P(g))\subseteq Im(h^P(f))$, de unde egalitatea $Ker(h^P(g))=Im(h^P(f))$ (vezi şi Propoziţia 2.34., (i).) ■

Teorema 5.36. Pentru $P\in Mod_s(A)$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) P este proiectiv

(ii) P este sumand direct într-un liber.

Demonstrație. (i)$\Rightarrow$(ii). Conform Corolarului 3.19. există un A-modul liber L şi un epimorfism $p:L\rightarrow P$. Deoarece P este proiectiv, considerând diagrama:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "1_P"] & \\ L \arrow[rr, "p"] & & P \end{tikzcd}$$

există $g:P\rightarrow L$ morfism de A-module a.î. $p\circ g=1_P$. Conform Corolarului 3.8., P este sumand direct în L.

(ii)$\Rightarrow$(i). Dacă P este sumand direct într-un liber L, cum L este proiectiv (conform Propoziției 5.33.) totul rezultă din Popoziția 5.34.. ■

Noțiunea duală celei de anvelopă injectivă este aceea de anvelopă proiectivă (vezi Capitolul 5, §9):

Definiția 5.37. Numim *anvelopă proiectivă* a unui A-modul M o pereche (P, p) cu $P\in Mod_s(A)$ modul proiectiv iar $p:P\rightarrow M$ un epimorfism superflu.

Din păcate nu orice A-modul admite anvelopă proiectivă.

Contraexemplul ne este oferit de $\mathbb{Z}$-modulul $\mathbb{Z}_n$ cu $n\geq 2$ care nu admite anvelopă proiectivă.

Într-adevăr, dacă prin absurd $\mathbb{Z}_n$ ar avea o anvelopă proiectivă (P, p) cu P $\mathbb{Z}$-modul proiectiv iar $p:P\rightarrow\mathbb{Z}_n$ epimorfism superflu de $\mathbb{Z}$-module, atunci din diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Z} \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[dr, "p_n"] & \\
P \arrow[rr, "p"] & & \mathbb{Z}_n
\end{tikzcd}$$

(unde $p_n:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n$ este epimorfismul canonic) deducem existența unui morfism de $\mathbb{Z}$-module $f:\mathbb{Z}\to P$ a.î. $p\circ f=p_n$. Cum p este epimorfism superflu în **Ab**, atunci rezultă că f este epimorfism şi deci Ker(f) este sumand direct în $\mathbb{Z}$. Dar atunci Ker(f)=**0**, adică f este izomorfism, de unde rezultă că p_n trebuie să fie superflu şi deci ar rezulta că idealul $n\mathbb{Z}$ trebuie să fie superflu în $\mathbb{Z}$, ceea ce este absurd!.

În schimb, se poate demonstra dual, rezultatul dual al celui stabilit în Teorema 5.31.:

Propoziția 5.38. Anvelopa proiectivă a unui A-modul dacă există atunci ea este unică pînă la un izomorfism.

Reamintim (vezi Capitolul 5, §2) că dacă $\mathfrak{C}$ este o categorie oarecare, o familie $(G_i)_{i\in I}$ de obiecte din $\mathfrak{C}$ se numeşte familie de *generatori* (*cogeneratori*) ai lui $\mathfrak{C}$, dacă pentru oricare X, Y∈Ob($\mathfrak{C}$) şi u, v∈$Hom_{\mathfrak{C}}$(X, Y) cu u≠v, există $f\in\bigcup_{i\in I}Hom_C(G_i,X)$ ($f\in\bigcup_{i\in I}Hom_C(Y,G_i)$) a.î. $u\circ f\neq v\circ f$ ($f\circ u\neq f\circ v$).

Dacă familia de generatori (cogeneratori) ai lui $\mathfrak{C}$ se reduce la un singur element G, atunci G se zice *generator* (*cogenerator*) al lui $\mathfrak{C}$.

Ținând cont de Propoziția 2.34. deducem imediat:

Propoziția 5.39. Pentru G∈Mod_s(A), următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) G este generator pentru Mod_s(A)

(ii) Pentru orice şir din $\mathrm{Mod}_s(A)$, $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ dacă şirul $h^G(M') \xrightarrow{h^G(f)} h^G(M) \xrightarrow{h^G(g)} h^G(M'')$ este exact în Ab atunci şi şirul $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ este exact în $\mathrm{Mod}_s(A)$.

Propoziția 5.40. Pentru $G \in \mathrm{Mod}_s(A)$, următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) G este generator pentru $\mathrm{Mod}_s(A)$

(ii) Pentru orice $M \in \mathrm{Mod}_s(A)$ şi orice $N \in L_A(M)$ propriu, există un morfism de A-module $f:G \to M$ a.î. $\mathrm{Im}(f) \not\subseteq N$

(iii) Pentru orice $M \in \mathrm{Mod}_s(A)$, dacă notăm $I = \mathrm{Hom}_A(G, M)$, atunci morfismul canonic de A-module $\varphi: G^{(I)} \to M$ definit pentru $\alpha = (x_f)_{f \in I} \in G^{(I)}$ (de suport finit) prin $\varphi(\alpha) = \sum_{f \in I} f(x_f)$ este epimorfism în $\mathrm{Mod}_s(A)$.

(iv) Pentru orice $M \in \mathrm{Mod}_s(A)$ există o mulțime de indici I şi un epimorfism de A module $f: G^{(I)} \to M$

(v) Există un număr natural $n \geq 1$ a.î. $G^n \approx A \amalg N$, cu $N \in \mathrm{Mod}_s(A)$.

Demonstrație. (i)⇒(ii). Deoarece $N \neq M$, atunci considerând epimorfismul canonic $p: M \to M/N$ avem că $p \neq 0$. Cum g este generator pentru $\mathbf{Mod_s(A)}$, există $f \in \mathbf{Hom}_A(G, M)$. a.î. $p \circ f \neq 0$ şi atunci $\mathrm{Im}(f) \not\subseteq N$.

(ii)⇒(iii). Dacă $N = \mathrm{Im}(\varphi) \neq M$, atunci există $g \in \mathbf{Hom}_A(G, M)$. a.î. $\mathrm{Im}(g) \not\subseteq N$ şi deci există $y \in \mathrm{Im}(g)$, $y = g(x)$ cu $x \in G$ a.î. $y \notin N$.

Considerând $\alpha_x \in G^{(I)}$, $\alpha_x = (x_f)_{f \in I}$ unde $x_f = \begin{cases} 0 & pentru\ f \neq g \\ x & pentru\ f = g \end{cases}$,

atunci $\varphi(\alpha_x) = g(x) = y \in \mathrm{Im}(\varphi)$ – absurd!, de unde concluzia că φ este epimorfism.

(iii)⇒(iv). – evidentă.

(iv)⇒(v). Conform ipotezei, pentru $M = A$ există o mulțime de indici I şi un epimorfism $f: G^{(I)} \to A$. Fie $x \in G^{(I)}$ a.î. $f(x) = 1$. Atunci notând cu n cardinalul mulțimii finite supp(x), există un monomorfism de

A-module $g:G^n \to G^{(I)}$ şi $x' \in G^n$ a.î. $g(x')=x$. Considerând $h=f \circ g:G^n \to A$ avem că $h(x')=1$, adică h este epimorfism de A-module. Cum A este A-modul proiectiv, atunci considerând diagrama din **Mod$_s$(A)**:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "1_A"] & \\ G^n \arrow[r, "h"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

există $h':A \to G^n$ a.î. $h \circ h' = 1_A$, adică h este inversabil la dreapta şi atunci deducem că A este sumand direct în G^n (conform Corolarului 3.8.), deci există $N \in$ **Mod$_s$(A)** a.î. $G^n \approx A \amalg N$.

(v)⇒(i). Fie M, $N \in$ **Mod$_s$(A)** şi $f_1, f_2 \in$ **Hom**$_A$(M, N) a.î. $f_1 \neq f_2$, adică există $x \in M$ a.î. $f_1(x) \neq f_2(x)$. Fie $g:A \to M$ morfismul de A-module pentru care $g(1)=x$ iar p proiecţia lui G^n pe A. Dacă notăm $h=g \circ p$, atunci în mod evident $f_1 \circ h \neq f_2 \circ h$ iar dacă notăm cu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ injecţiile canonice ale lui G în G^n, atunci există cel puţin un indice $1 \leq i_k \leq n$ a.î. $f_1 \circ (h \circ \alpha_{i_k}) \neq f_2 \circ (h \circ \alpha_{i_k})$ şi astfel notând $f = h \circ \alpha_{i_k} \in$ **Hom**$_A$(G, M), avem că $f_1 \circ f \neq f_2 \circ f$, adică G este generator pentru **Mod$_s$(A)**. ■

Corolar 5.41. (i) Dacă G este generator pentru Mod$_s$(A),atunci pentru orice M∈ Mod$_s$(A), $G \amalg M$ este de asemenea generator pentru Mod$_s$(A).

(ii) Orice A-modul liber nenul este generator pentru Mod$_s$(A); în particular A este generator pentru Mod$_s$(A).

Noţiunea de cogenerator fiind duală noţiunii de generator avem prin dualizarea rezultatelor de mai sus următoarele rezultate:

Propoziția 5.42. Pentru $G \in Mod_s(A)$ următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) G este cogenerator pentru $Mod_s(A)$

(ii) Pentru orice şir din $Mod_s(A)$, $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ **, dacă şirul** $h_G(M'') \xrightarrow{h_G(f)} h_G(M) \xrightarrow{h_G(g)} h_G(M')$ **este exact în Ab, atunci şi şirul** $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ **este exact în $Mod_s(A)$.**

Propoziția 5.43. Pentru $G \in Mod_s(A)$ următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) G este cogenerator pentru $Mod_s(A)$

(ii) Pentru orice $M \in Mod_s(A)$ şi orice $N \in L_A(M)$ propriu, există un morfism de A-module $f:M \to G$ a.î. $f(N) \neq 0$

(iii) Pentru orice $M \in Mod_s(A)$ dacă notăm $I = Hom_A(M, G)$ atunci morfismul canonic de A-module $\psi:M \to G^{(I)}$ definit pentru $x \in M$ prin $(\psi(x))_f = f(x)$ pentru orice $f \in I$, este monomorfism în $Mod_s(A)$.

(iv) Pentru orice $M \in Mod_s(A)$, există o mulțime de indici I şi un monomorfism de A module $f:M \to G^{(I)}$.

Corolar 5.44. Dacă $G \in Mod_s(A)$ este cogenerator pentru $Mod_s(A)$, atunci pentru orice $M \in Mod_s(A)$, $G \amalg M$ este cogenerator pentru $Mod_s(A)$.

§6. Produs tensorial de module. Produs tensorial de morfisme. Functorii S_M şi T_N; transportul şirurilor exacte scurte prin aceşti functori. Comutativitatea produsului tensorial. Permutarea produsului tensorial cu sumele directe. Produs tensorial de module libere. Asociativitatea produsului tensorial. Proprietatea de adjuncție. Module plate.

În cadrul acestui paragraf prin A vom desemna un inel unitar.

Fie M un A-modul drept, N un A-modul stâng iar G un grup abelian aditiv (deci $M \in \mathbf{Mod_d(A)}$, $N \in \mathbf{Mod_s(A)}$ şi $G \in \mathbf{Ab}$).

Definiţia 6.1. O aplicaţie $\varphi: M \times N \to G$ se zice

(i) *$\mathbb{Z}$–biliniară* dacă

$\varphi(x+x', y) = \varphi(x, y) + \varphi(x', y)$ şi

$\varphi(x, y+y') = \varphi(x, y) + \varphi(x, y')$ pentru orice $x, x' \in M$ şi $y, y' \in N$

(ii) *A-balansată* dacă $\varphi(xa, y) = \varphi(x, ay)$ pentru orice $x \in M$, $y \in N$ şi $a \in A$.

Definiţia 6.2. Fiind date $M \in Mod_d(A)$, $N \in Mod_s(A)$, numim *produsul tensorial al lui M cu N peste A* un dublet (G, φ) notat $M \otimes_A N$ şi format dintr-un grup abelian G şi o aplicaţie $\mathbb{Z}$-biliniară şi A-balansată $\varphi: M \times N \to G$ cu proprietatea că pentru oricare alt grup abelian G' şi orice aplicaţie $\mathbb{Z}$-biliniară şi A-balansată $\varphi': M \times N \to G'$ există un unic morfism de grupuri $u: G \to G'$ a.î. diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & G \arrow[d, dashed, "u"] \\ & G' \end{tikzcd}$$

este comutativă, adică $u \circ \varphi = \varphi'$.

Teorema 6.3. Pentru oricare două A-module $M \in Mod_d(A)$ şi $N \in Mod_s(A)$ există produsul tensorial $M \otimes_A N$ al lui M cu N peste A care este unic pînă la un izomorfism de grupuri.

Unicitatea trebuie înțeleasă în sensul că dacă (G, φ) şi (G', φ') sunt două produse tensoriale ale lui M cu N peste A, atunci există un izomorfism de grupuri $u:G\to G'$ a.î. diagrama:

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dd, dashed, "u"] \\ M\times N \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & \\ & G' \end{tikzcd}$$

este comutativă, adică $u\circ\varphi=\varphi'$.

Demonstrație. Să demonstrăm la început unicitatea, Deoarece $(G, \varphi)=M\otimes_A N$, există $u:G\to G'$ morfism de grupuri a.î. $u\circ\varphi=\varphi'$.

Ținând cont că şi $(G', \varphi')=M\otimes_A N$ există $u':G'\to G$ morfism de grupuri a.î. $u'\circ\varphi'=\varphi$.

Deducem imediat că $(u\circ u')\circ\varphi'=u\circ(u'\circ\varphi')=u\circ\varphi=\varphi'$ şi cum $1_{G'}$ verifică condiția $1_{G'}\circ\varphi'=\varphi'$ deducem datorită unicității că $u\circ u'=1_{G'}$. Analog deducem că şi $u'\circ u=1_G$, de unde concluzia că u este izomorfism de grupuri.

Să probăm acum existența lui $M\otimes_A N$.

Fie $L=\mathbb{Z}^{(M\times N)}=\coprod_{i\in M\times N}\mathbb{Z}_i$ (cu $\mathbb{Z}_i=\mathbb{Z}$ pentru orice $i\in M\times N$) $\mathbb{Z}$-modul liber cu baza $\{e_{(x,y)}\}_{(x,y)\in M\times N}$; pentru simplificare convenim să notăm elementul $e_{(x, y)}$ cu (x, y) oricare ar fi $(x, y)\in M\times N$.

În L considerăm subgrupul K generat de elementele de forma: $(x+x', y)-(x, y)-(x', y)$, $(x, y+y')-(x, y)-(x, y')$ şi $(xa, y)-(x, ay)$ cu $x, x'\in M$, $y, y'\in N$ şi $a\in A$. Notăm cu $\tau:M\times N\to L$ injecția canonică, cu $p:L\to L/K$ epimorfismul canonic iar cu $\varphi=p\circ\tau:M\times N\to L / K$.

În mod evident φ este aplicație $\mathbb{Z}$-biliniară şi A-balansată.

Să demonstrăm că $(L / K, \varphi)=M\otimes_A N$ iar pentru aceasta fie G' un grup abelian şi $\varphi':M\times N\to G'$ o aplicație $\mathbb{Z}$-biliniară şi A-balansată.

Ținând cont de Teorema 2.19. există un unic morfism de grupuri $v:\mathbb{Z}^{(M\times N)}\to G$ a.î. $v\circ\tau=\varphi'$

$$\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & L=\mathbb{Z}^{(M\times N)} \arrow[r, "p"] \arrow[d, dashed, "v"] & L / K \arrow[dl, dashed, "u"] \\
& G' &
\end{tikzcd}$$

Cum v coincide cu φ' pe $M\times N$ deducem imediat că generatorii lui K sunt în Ker(v).

Într-adevăr, $v((x+x', y)-(x, y)-(x', y))=v((x+x', y))-v((x, y))-v((x', y))=\varphi'(x+x', y)-\varphi'(x, y)-\varphi'(x', y)=0$ şi analog pentru ceilalți, de unde concluzia $K\subseteq Ker(v)$ şi astfel există un unic morfism de grupuri $u:L / K\to G'$ a.î. $u\circ p=v$. Avem $u\circ\varphi=u\circ(p\circ\tau)=(u\circ p)\circ\tau=u\circ v=\varphi'$. Unicitatea lui u cu proprietatea $\varphi'=u\circ\varphi$ rezultă din faptul că morfismele v şi u cu proprietățile $\varphi'=v\circ\tau$ şi respectiv $u\circ p=v$ sunt unic determinate.

Prin urmare $(L / K, \varphi)=M\otimes_A N$. ■

În continuare, dacă nu este pericol de confuzie în loc de $M\otimes_A N$ vom scrie mai simplu $M\otimes N$.

Aplicația $\varphi:M\times N\to M\otimes N$ poartă numele de *aplicația canonică*. Pentru orice $x\in M$ şi $y\in N$ notăm $\varphi(x, y)=x\otimes y$.

Observația 6.4. Deoarece aplicația canonică $\varphi:M\times N\to M\otimes N$ este $\mathbb{Z}$-biliniară şi A-balansată, pentru orice $x, x'\in M$, $y, y'\in N$ şi $a\in A$ avem egalitățile:

$$(x+x')\otimes y=x\otimes y+x'\otimes y$$

$$x\otimes(y+y')=x\otimes y+x\otimes y'$$

$$(xa)\otimes y = x\otimes(ay).$$

De asemenea, deducem imediat şi egalităţile:

$$x\otimes 0 = 0\otimes y = 0$$

$$(-x)\otimes y = x\otimes(-y) = -(x\otimes y)$$

$$(nx)\otimes y = x\otimes(ny) = n(x\otimes y)\ (n\in\mathbb{Z}).$$

Propoziţia 6.5. Mulţimea $\{x\otimes y \mid x\in M,\ y\in N\}$ este un sistem de generatori pentru grupul abelian $M\otimes N$. Mai mult, pentru orice $z\in M\otimes N$ există $x_1, \dots, x_n\in M$, $y_1, \dots, y_n\in N$ a.î. $z=x_1\otimes y_1+\dots+x_n\otimes y_n$.

Demonstraţie. Avem că $M\otimes N=L / K$ iar $p:L\to L / K$ este epimorfism, de unde concluzia că elementele de forma $\varphi(x, y)=x\otimes y$ cu $x\in M$ şi $y\in N$ generează pe $M\otimes N$. Deci, pentru orice $z\in M\otimes N$ există $x'_1, \dots, x'_n\in M$, $y_1, \dots, y_n\in N$ şi $m_1, \dots, m_n\in\mathbb{Z}$ a.î.

$$z=\sum_{i=1}^{n} m_i\left(x'_i\otimes y_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(m_i x'_i\right)\otimes y_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\otimes y_i\right)$$

cu $x_i=m_i x'_i\in M$, $1\le i\le n$. ■

Să definim acum produsul tensorial de morfisme de A-module.

Fie M, M' două A-module la dreapta, N, N' două A-module la stânga iar $f:M\to M'$ şi $g:N\to N'$ două morfisme de A-module la dreapta, respectiv la stânga.

Considerăm diagrama:

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & M\otimes N \arrow[d, dashed, "u"] \\ & M'\otimes N' \end{tikzcd}$$

unde φ este aplicaţia canonică iar φ' se defineşte prin $\varphi'(x, y)=f(x)\otimes g(y)$ pentru orice $x\in M$ şi $y\in N$.

Se constată imediat că φ' este o aplicaţie $\mathbb{Z}$-biliniară şi A-balansată şi atunci din proprietatea de universalitate a produsului tensorial există un unic morfism de grupuri $u:M\otimes N\to M'\otimes N'$ a.î. $u\circ\varphi=\varphi'$. Prin definiție u se va nota $f\otimes g$ şi poartă numele de *produsul tensorial al morfismelor f şi g*.

Observăm că dacă $(x, y)\in M\times N$, atunci cum $u\circ\varphi=\varphi'$ deducem că $u(x\otimes y)=f(x)\otimes g(y)$. Cum u este morfism de grupuri deducem că pentru orice $z\in M\otimes N$, $z=\sum_{i=1}^{n}(x_i\otimes y_i)$ cu $x_i\in M$, $y_i\in N$ avem:

$$(f\otimes g)\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i\otimes y_i)\right)=\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)\otimes g(y_i)).$$

Propoziția 6.6. Dacă M, M′, M″ sunt trei A-module la dreapta, N, N′, N″ trei A module la stânga iar $M\xrightarrow{f}M'\xrightarrow{f'}M''$, $N\xrightarrow{g}N'\xrightarrow{g'}N''$, sunt morfisme atunci

$$(f'\circ f)\otimes(g'\circ g)=(f'\otimes g')\circ(f\otimes g).$$

De asemenea, $1_M\otimes 1_N=1_{M\otimes N}$.

Demonstrație. Arătăm că egalitatea este adevărată pe generatori: $((f'\otimes g')\circ(f\otimes g))(x, y)=(f'\otimes g')((f\otimes g)(x, y))=(f'\otimes g')(f(x)\otimes g(y))=$ $=f'(f(x))\otimes g'(g(y))=(f'\circ f)(x)\otimes(g'\circ g)(y)=((f'\circ f)\otimes(g'\circ g))(x, y)$ $(x\in M, y\in N)$ şi atunci, ținând cont de Propoziția 6.5., deducem imediat egalitățile din enunț. ■

Să fixăm M un A-modul drept şi N un A-modul stâng.

Din cele exprimate anterior deducem că asociind la fiecare A-modul stâng P grupul abelian $M\otimes P$ şi la fiecare morfism $P\xrightarrow{f}Q$ de A-module stângi morfismul de grupuri abeliene $1_M\otimes f:M\otimes P\to M\otimes Q$ obținem un functor covariant

$$S_M : \mathbf{Mod_s(A)}\to\mathbf{Ab}.$$

Analog, asociind la fiecare A-modul drept R grupul abelian $R\otimes N$ şi la fiecare morfism de A-module drepte $R\xrightarrow{f}S$ morfismul de grupuri abeliene $f\otimes 1_N$ obținem de asemenea un functor covariant

$$T_N : \mathbf{Mod_d(A)}\to\mathbf{Ab}.$$

Să vedem în continuare cum transportă aceşti functori covarianţi şirurile exacte.

Propoziţia 6.7. (i) Dacă $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ **un şir exact scurt în Mod$_d$(A), atunci pentru orice N∈Mod$_s$(A) şirul:** $T_N(M') \xrightarrow{T_N(f)} T_N(M) \xrightarrow{T_N(g)} T_N(M'') \longrightarrow 0$ **este exact în Ab.**

(ii) Dacă $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0$ **un şir exact scurt în Mod$_s$(A), atunci pentru orice M∈Mod$_d$(A) şirul:** $S_M(N') \xrightarrow{S_M(f)} S_M(N) \xrightarrow{S_M(g)} S_M(N'') \longrightarrow 0$ **este exact în Ab.**

Demonstraţie. (i). Avem de probat că şirul:

$$M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes 1_N} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes 1_N} M'' \otimes N \longrightarrow 0$$

este exact în **Ab**. Să notăm $f' = f \otimes 1_N$ şi $g' = g \otimes 1_N$.

Trebuie să demonstrăm că $Ker(g') = Im(f')$ şi că g' este epimorfism.

Deoarece $Ker(g) = Im(f)$ deducem că $g \circ f = 0$ şi atunci $g' \circ f' = (g \otimes 1_N) \circ (f \otimes 1_N) = (g \circ f) \otimes 1_N = 0 \otimes 1_N = 0$, de unde incluziunea $Im(f') \subseteq Ker(g')$.

Fie $p : M \otimes N \to (M \otimes N) / Im(f')$ epimorfismul canonic.

Cum $Ker(p) = Im(f') \subseteq Ker(g')$ există $h : M \otimes N / Im(f') \to M'' \otimes N$ a.î. $g' = h \circ p$. Obţinem astfel diagrama din **Ab**:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "p"'] & M'' \otimes N \arrow[dl, "h"] \\
(M \otimes N) / Im(f') &
\end{tikzcd}$$

Dacă reuşim să arătăm că h este izomorfism de grupuri atunci problema este rezolvată deoarece din $h \circ p = g'$ deducem pe de o parte că g' este epimorfism iar pe de altă parte că $Ker(g') = Ker(p) = Im(f')$.

Vom defini la început o aplicație $\mathbb{Z}$-biliniară şi A-balansată $\psi: M'' \times N \to (M \otimes N) / \mathrm{Im}(f')$. Fie $(x'', y) \in M'' \times N$; cum g este surjecție, există $x \in M$ a.î. $g(x) = x''$. Definim atunci $\psi(x'', y) = p(x \otimes y)$ şi să arătăm că ψ este corect definită. Dacă mai avem $x_1 \in M$ a.î. $g(x_1) = x''$ atunci $g(x) = g(x_1)$, deci $x_1 - x \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$ şi deci $x_1 - x = f(x')$ cu $x' \in M'$. Obținem că $x_1 \otimes y - x \otimes y = f(x') \otimes y = f'(x' \otimes y) \in \mathrm{Im}(f')$, deci $p(x \otimes y) = p(x_1 \otimes y)$, adică ψ este corect definită. Se verifică imediat că ψ este o aplicație $\mathbb{Z}$-biliniară şi A-balansată şi atunci din proprietaea de universalitate a produsului tensorial există un unic morfism de grupuri abeliene $t: M'' \otimes N \to (M \otimes N) / \mathrm{Im}(f')$ a.î. diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M'' \times N \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & M'' \otimes N \arrow[dl, dashed, "t"] \\
& (M \otimes N) / \mathrm{Im}(f') &
\end{tikzcd}$$

este comutativă, adică $t \circ \varphi = \psi$.

Să arătăm că t este inversul lui h şi atunci va rezulta că h este izomorfism de grupuri.

Deoarece pentru orice generator $x'' \otimes y$ al lui $M'' \otimes N$ (cu $x'' = g(x)$) avem:

$(h \circ t)(x'' \otimes y) = h(t(x'' \otimes y)) = h(p(x \otimes y)) = g(x) \otimes y = x'' \otimes y = 1_{M'' \otimes N}(x'' \otimes y)$ deducem că $h \circ t = 1_{M'' \otimes N}$.

Deoarece p este epimorfism şi $\{x \otimes y \mid x \in M, y \in N\}$ generează grupul $M \otimes N$, rezultă că $\{p(x \otimes y)$ cu $x \in M$ şi $y \in N\}$ generează grupul $(M \otimes N) / \mathrm{Im}(f')$ iar pe generatorii acestui grup avem:

$$(t \circ h)(p(x \otimes y)) = t(h(p(x \otimes y))) = t(g(x) \otimes y) = p(x \otimes y)$$

de unde concluzia că şi $t \circ h$ este identitatea grupului $(M \otimes N) / \mathrm{Im}(f')$, adică h este izomorfism de grupuri.

(ii). Se demonstrează analog ca (i). ■

Corolar 6.8. (i) Produsul tensorial a două epimorfisme de module este epimorfism în Ab.

(ii) În general, un produs tensorial de două monomorfisme de module nu este monomorfism.

(iii) Produsul tensorial a două izomorfisme f şi g de module este izomorfism în Ab şi în plus $(f\otimes g)^{-1}=f^{-1}\otimes g^{-1}$.

Demonstraţie. (i). Fie $M \xrightarrow{f} M''$ şi $N \xrightarrow{g} N''$ epimorfisme în **Mod$_d$(A)** şi respectiv **Mod$_s$(A)**.

Deoarece şirul $0 \longrightarrow Ker(f) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} M'' \longrightarrow 0$ este exact în **Mod$_d$(A)**, (i=incluziunea), din Propoziţia 6.7.(i), deducem că $f\otimes 1_{N''}$ este epimorfism în **Ab**.

Analog deducem că şi $1_M\otimes g$ este epimorfism în **Ab** şi cum

$$f\otimes g=(f\otimes 1_{N''})\circ(1_M\otimes g)$$

deducem că $f\otimes g$ este epimorfism în **Ab**.

(ii). Fie $n\geq 2$ un număr natural şi să arătăm la început că $\mathbb{Z}_n\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}=\mathbf{0}$.

Într-adevăr dacă $x\in\mathbb{Z}_n$ şi $y\in\mathbb{Q}$, avem

$$x \otimes_{\mathbb{Z}} y=x\otimes[n(\frac{1}{n}r)]=(xn)\otimes(\frac{1}{n}r)=0\otimes\frac{1}{n}r=0.$$

Astfel, dacă considerăm şirul exact canonic din **Mod$_d$($\mathbb{Z}$)**:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \xrightarrow{p} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

(i=incluziunea, p=epimorfismul canonic) atunci conform Propoziţiei 6.7., (i), şirul:

$$\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n \xrightarrow{i\otimes 1_{\mathbb{Z}_n}} \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n \xrightarrow{p\otimes 1_{\mathbb{Z}_n}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n \longrightarrow 0$$

este exact în **Ab**.

Deoarece $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n=\mathbf{0}$ şi $\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n=\mathbb{Z}_n\neq\mathbf{0}$ (vezi Propoziţia 6.13.) atunci $\mathrm{Ker}(i\otimes 1_{\mathbb{Z}_n})\neq\mathbf{0}$ şi deci $i\otimes 1_{\mathbb{Z}_n}$ nu este monomorfism în **Ab**, deşi i şi $1_{\mathbb{Z}_n}$ sunt monomorfisme.

(iii). Să presupunem că $f:M\to M'$ şi $g:N\to N'$ sunt izomorfisme de A-module. Din $(f\otimes g)\circ(f^{-1}\otimes g^{-1})=(f\circ f^{-1})\otimes (g\circ g^{-1})=1_{M'}\otimes 1_{N'}=1_{M'\otimes N'}$ şi $(f^{-1}\otimes g^{-1})\circ(f\otimes g)=(f^{-1}\circ f)\otimes(g^{-1}\circ g)=1_M\otimes 1_N=1_{M\otimes N}$ deducem că $f\otimes g$ este izomorfism în **Ab** şi în plus $(f\otimes g)^{-1}=f^{-1}\otimes g^{-1}$. ■

Observaţia 6.9. În cadrul Observaţiei 1.2. de la Capitolul 6 am văzut că dacă M este un A-modul stâng (drept) atunci M devine în mod canonic un A^o-modul drept (stâng) numit opusul lui M şi notat prin M^o.

Propoziţia 6.10. Dacă M este un A-modul drept iar N un A-modul stâng, atunci există un izomorfism canonic de grupuri abeliene $\varphi_{M,N}:M\otimes_A N\to N^o\otimes_{A^o} M^o$ a.î. $\varphi_{M,N}(x\otimes y)=y\otimes x$ oricare ar fi $x\in M$ şi $y\in N$.

Demonstraţie. Se constată imediat că $\psi:M\times N\to N^o\otimes_{A^o} M^o$ definită prin $\psi(x, y)=y\otimes x$ este $\mathbb{Z}$-biliniară şi A-balansată şi astfel din proprietatea de universalitate a produsului tensorial există un unic morfism de grupuri $\varphi_{M,N}:M\otimes_A N\to N^o\otimes_{A^o} M^o$ a.î. $\varphi_{M,N}(x\otimes y)=y\otimes x$ oricare ar fi $x\in M$ şi $y\in N$.

Analog deducem că există un unic morfism de grupuri $\varphi'_{M,N}: N^o\otimes_{A^o} M^o\to M\otimes_A N$ a.î. $\varphi'_{M,N}(y\otimes x)=x\otimes y$ pentru orice $x\in M$ şi $y\in N$.

Se probează imediat că $\varphi_{M,N}$ şi $\varphi'_{M,N}$ sunt una inversa celeilalte, de unde concluzia din enunţ. ■

Corolar 6.11. (*Comutativitatea produsului tensorial*). Dacă A este un inel comutativ şi M şi N două A-module, atunci există un unic izomorfism de grupuri abeliene $\varphi_{M,N}:M\otimes_A N\to N\otimes_A M$ a.î. $\varphi_{M,N}(x\otimes y)=y\otimes x$ oricare ar fi $x\in M$ şi $y\in N$.

Propoziția 6.12. Dacă M este un A-modul drept, atunci există un izomorfism de A-module drepte u_M:$M\otimes_A A\to M$ a.î. $u_M(x\otimes a)=xa$ pentru orice $x\in M$ şi $a\in A$.

În plus dacă M' este un alt A-modul drept iar $f:M\to M'$ este un morfism de A-module drepte, atunci diagrama:

$$\begin{tikzcd} M\otimes_A A \arrow[r, "f\otimes 1_A"] \arrow[d, "u_M"'] & M'\otimes_A A \arrow[d, "u_{M'}"] \\ M \arrow[r, "f"] & M' \end{tikzcd}$$

este comutativă, adică $f\circ u_M=u_{M'}\circ(f\otimes 1_A)$.

Demonstrație. Definind $\psi:M\times A\to M$ prin $\psi(x, a)=xa$ pentru orice $x\in M$ şi $a\in A$ se probează imediat că ψ este o aplicație $\mathbb{Z}$-biliniară şi A-balansată. Din proprietatea de universalitate a produsului tensorial (vezi Definiția 6.2. şi Teorema 6.3.) există un unic morfism de grupuri $u_M:M\otimes_A A\to M$ a.î. $u_M(x\otimes a)=xa$ pentru orice $x\in M$ şi $a\in A$.

Dacă $b\in A$ atunci $u_M((x\otimes a)b)=u_M(x\otimes(ab))=x(ab)=(xa)b=$ $=u_M(x\otimes a)b$, adică u_M este morfism de A-module drepte. Deoarece în mod evident u_M este surjecție, pentru a proba că u_M este izomorfism de A-module mai trebuie probată injectivitatea lui u_M iar pentru aceasta fie $z\in M\otimes_A A$ a.î. $u_M(z)=0$. Atunci $z=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\otimes a_i\right)$ cu $x_i\in M$ şi $a_i\in A$, $1\leq i\leq n$. Scriind pentru orice $1\leq i\leq n$ $x_i\otimes a_i=(x_ia_i)\otimes 1$ putem scrie $z=x\otimes 1$ cu $x=\sum_{i=1}^{n}x_ia_i\in M$ astfel că din $u_M(z)=0$ deducem că $u_M(x\otimes 1)=0\Leftrightarrow$ $x\cdot 1=0$, deci $x=0$ şi atunci şi $z=0$.

Pentru a proba comutativitatea diagramei din enunț, fie $x\otimes a$ un generator al lui $M\otimes_A A$. Atunci $(f\circ u_M)(x\otimes a)=f(u_M(x\otimes a))=f(xa)=f(x)\cdot a$

iar $(u_{M'}\circ(f\otimes 1_A))(x\otimes a)=u_{M'}((f\otimes 1_A)(x\otimes a))=u_{M'}(f(x)\otimes a)=f(x)\cdot a$, de unde egalitatea $f\circ u_M=u_{M'}\circ(f\otimes 1_A)$. ■

Analog se probează:

Propoziția 6.13. Dacă N este un A-modul stâng, atunci există un izomorfism de A-module stângi $v_N:A\otimes_A N\to N$ a.î. $v_N(a\otimes x)=ax$ pentru orice $x\in N$ şi $a\in A$.

În plus, dacă N' este un alt A-modul stâng iar $f:N\to N'$ este un morfism de A-module stângi, diagrama:

$$\begin{tikzcd} A\otimes_A N \arrow[r, "1_A\otimes f"] \arrow[d, "v_N"'] & A\otimes_A N' \arrow[d, "v_{N'}"] \\ N \arrow[r, "f"] & N' \end{tikzcd}$$

este comutativă.

În continuare vom arăta că produsul tensorial permută cu sumele directe.

Propoziția 6.14. Dacă $(M_i)_{i\in I}$ este o familie de A-module drepte iar N este un A-modul stâng, atunci avem următorul izomorfism de grupuri abeliene:

$$\left(\coprod_{i\in I} M_i\right)\otimes_A N \approx \coprod_{i\in I}\left(M_i\otimes_A N\right).$$

Demonstrație. Fie $M=\coprod_{i\in I} M_i$ iar $\alpha_i:M_i\to M$ injecțiile canonice, $i\in I$. Considerăm de asemenea $\varphi:M\times N\to M\otimes_A N$ şi $\varphi_i:M_i\times N\to M_i\otimes_A N$ $(i\in I)$ aplicațiile canonice.

Vom arăta că $(M\otimes_A N, (\alpha_i\otimes 1_N)_{i\in I})$ este o sumă directă a familiei de grupuri abeliene $(M_i\otimes_A N)$ iar pentru aceasta trebuie să probăm că dacă G este un alt grup abelian şi $u_i:M_i\otimes_A N\to G$ $(i\in I)$ este o familie de morfisme de grupuri abeliene, atunci există un unic morfism de grupuri $u:M\otimes_A N\to G$ a.î. $u_i=u\circ(\alpha_i\circ 1_N)$, pentru orice $i\in I$.

$$\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & M\otimes_A N \arrow[d, dashed, "u"] & M_i\otimes_A N \arrow[l, "\alpha_i\otimes 1_N"'] \arrow[dl, "u_i"] & M_i\times N \arrow[l, "\varphi_i"'] \arrow[dll, "\psi_i"] \\
 & G & &
\end{tikzcd}$$

Pentru fiecare $i\in I$, $\psi_i=u_i\circ\varphi_i$ este în mod evident aplicație $\mathbb{Z}$-biliniară şi A-balansată.

Dacă $x\in M=\coprod_{i\in I} M_i$, atunci există $x_i\in M_i$, $i\in I$ unic determinați şi aproape toți nuli a.î. $x=\sum_{i\in I}\alpha_i(x_i)$ (vezi Propoziția 3.3. de la Capitolul 6).

Definind $\psi:M\times N\to G$ prin $\psi(x, y)=\sum_{i\in I}\psi_i(x_i, y)$ oricare ar fi $x=\sum_{i\in I}\alpha_i(x_i)\in M$ şi $y\in N$, cum aplixcațiile ψ_i ($i\in I$) sunt $\mathbb{Z}$-biliniare şi A-balansate, rezultă că ψ este aplicație $\mathbb{Z}$-biliniară şi A-balansată şi atunci din proprietatea de universalitate a produsului tensorial există $u:M\otimes_A N\to G$ un unic morfism de grupuri abeliene a.î. $\psi=u\circ\varphi$.

Cum $u(x\otimes y)=u(\varphi(x, y))=\psi(x, y)$ pentru orice $x\in M$ şi $y\in N$, deducem imediat că $u\circ(\alpha_i\otimes 1_N)=u_i$ pentru orice $i\in I$ (este suficient să se arate această egalitate pe generatorii $x_i\otimes y$ ai lui $M_i\otimes_A N$).

Unicitatea lui u se probează imediat observând că dacă mai avem $u':M\otimes_A N\to G$ ce face comutativ triunghiul din mijlocul diagramei de mai înainte, atunci $u'\circ\varphi=\psi$ şi deci $u=u'$. ■

Analog se probează:

Propoziția 6.15. Dacă $(N_i)_{i\in I}$ este o familie de A-module stângi iar M este un A-modul drept, atunci avem următorul izomorfism de grupuri abeliene:

$$M\otimes_A\left(\coprod_{i\in I}N_i\right)\approx\coprod_{i\in I}\left(M\otimes_A N_i\right).$$

Lema 6.16. Fie M un modul drept liber având baza formată dintr-un singur element {e}. Atunci pentru orice A-modul stâng N şi orice $z\in M\otimes_A N$ există un unic $y\in N$ a.î. $z=e\otimes_A y$.

Demonstrație. Avem $M=eA$ şi $u:A\to M$, $u(a)=ea$ pentru orice $a\in A$ este un izomorfism de A-module drepte. Atunci $u\otimes 1_N:A\otimes_A N\to M\otimes_A N$ este izomorfism de grupuri abeliene. Fie de asemenea $v:N\to A\otimes_A N$ izomorfismul canonic (dat de Propoziția 6.13.), $v(y)=1\otimes y$ pentru orice $y\in N$.

Atunci $w=(u\otimes 1_N)\circ v:N\to M\otimes_A N$ este un izomorfism de grupuri abeliene şi astfel pentru $z\in M\otimes_A N$ există un unic $y\in N$ a.î. $z=w(y)=(u\otimes 1_N)(v(y))=(u\otimes 1_N)(1\otimes y)=e\otimes y$. ■

Propoziția 6.17. Dacă M este un A-modul drept de bază $(e_i)_{i\in I}$ şi N un A-modul stâng, atunci oricare ar fi $z\in M\otimes_A N$ există $y_i\in N$, $i\in I$ unic determinați şi aproape toți nuli a.î. $z=\sum_{i\in I}\left(e_i\otimes y_i\right)$.

Demonstrație. Deoarece $(e_i)_{i\in I}$ este o bază a lui M atunci putem scrie $M=\coprod_{i\in I}\left(e_iA\right)$ de injecții canonice morfismele incluziune $\alpha_i:e_iA\to M$ $(i\in I)$. Ținând cont de Propoziția 6.14. putem scrie $M\otimes N=\left(\coprod_{i\in I}e_iA\right)\otimes N=\coprod_{i\in I}\left(e_iA\otimes N\right)$ de injecții canonice $\overline{\alpha}_i=\alpha_i\otimes 1_N$, $i\in I$.

Dacă $z\in M\otimes N$ atunci există elementele $z_i\in e_iA\otimes N$, $i\in I$ unic determinate şi aproape toate nule a.î. $z=\sum_{i\in I}\overline{\alpha}_i\left(z_i\right)$.

Ținând cont de Lema 6.16. deducem că pentru orice $i\in I$ există $y_i\in N$ unic determinat a.î. $z_i=e_i\otimes y_i$.

Atunci $z=\sum_{i\in I}\overline{\alpha}_i(z_i)=\sum_{i\in I}(\alpha_i\otimes 1_N)(e_i\otimes y_i)=\sum_{i\in I}(e_i\otimes y_i)$. ■

Analog se demonstrează:

Propoziția 6.18. Dacă M este un A-modul drept şi N un A-modul stâng de bază $(f_j)_{j\in J}$ atunci oricare ar fi $z\in M\otimes_A N$ există $x_j\in M$, $j\in J$ unic determinați şi aproape toți nuli a.î. $z=\sum_{j\in J}(x_j\otimes f_j)$.

Corolar 6.19. Dacă A este comutativ iar M şi N sunt două A-module libere de baze $(e_i)_{i\in I}$ şi respectiv $(f_j)_{j\in J}$, atunci $M\otimes_A N$ este un A-modul liber de bază $(e_i\otimes f_j)_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$.

Demonstrație. Dacă $x\in M$ şi $y\in N$ atunci putem scrie $x=\sum_{i\in I}a_ie_i$, $y=\sum_{j\in J}b_jf_j$ cu $a_i, b_j\in A$ unic determinați şi aproape toți nuli şi atunci $x\otimes y=\left(\sum_{i\in I}a_ie_i\right)\otimes\left(\sum_{j\in J}b_jf_j\right)=\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}}a_ib_j(e_i\otimes f_j)$, de unde deducem că $(e_i\otimes f_j)_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$ este un sistem de generatori $M\otimes_A N$.

Dacă avem $a_{ij}\in A$, $i\in I$, $j\in J$ aproape toți nuli a.î. $\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}}a_{ij}(e_i\otimes f_j)=0$ atunci $\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I}a_{ij}e_i\right)\otimes f_j=0=\sum_{j\in J}(0\otimes f_j)$ şi din Propoziția 6.18. deducem că $\sum_{i\in I}a_{ij}e_i=0$ pentru orice $j\in J$, iar apoi deducem că $a_{ij}=0$ pentru orice $i\in I$ şi $j\in J$.■

Corolar 6.20. Dacă M şi N sunt două A-module libere de rang finit peste inelul comutativ A, atunci $M\otimes_A N$ este un A-modul liber de rang finit şi

$$\mathrm{rang}(M\otimes_A N)=\mathrm{rang}(M)\cdot\mathrm{rang}(N).$$

În particular, dacă A=K este un corp comutativ, atunci

$$\dim_K(M\otimes_K N)=\dim_K(M)\cdot\dim_K(N).$$

Pe lîngă inelul A să mai considerăm încă două inele B şi C.

Presupunem că M este un (B, A)-bimodul iar N este un (A, C)-bimodul. Pentru $b\in B$, $c\in C$ şi $x\in M$, $y\in N$ definim:

$$b(x\otimes y)= (bx)\otimes y \text{ şi } (x\otimes y)c=x\otimes(yc).$$

Lema 6.21. Ținând cont de cele expuse mai sus, $M\otimes_A N$ devine B-modul stâng şi C-modul drept.

Demonstrație. Fie $\varphi:M\times N\to M\otimes_A N$ aplicația canonică iar pentru $b\in B$, $\psi_b:M\times N\to M\otimes_A N$, $\psi_b(x\otimes y)=(bx)\otimes y$. Se verifică imediat că ψ_b este $\mathbb{Z}$-biliniară şi A-balansată. Din proprietatea de universalitate a produsului tensorial există un unic morfism de grupuri $u_b:M\otimes_A N\to M\otimes_A N$ a.î. $u_b\circ\varphi=\psi_b$, adică $u_b(x\otimes y)=(bx)\otimes y$ pentru orice $x\in M$ şi $y\in N$.

Dacă $z\in M\otimes_A N$ punem prin definiție: $b\cdot z=u_b(z)$ şi se verifică imediat că în felul acesta $M\otimes_A N$ devine B-modul stâng şi în plus $b(x\otimes y)=(bx)\otimes y$.

Analog se arată că $M\otimes_A N$ devine C-modul drept.

Deoarece pentru orice $b\in B$ şi $c\in C$ avem

$$(b(x\otimes_A y))c=((bx)\otimes_A y)c=(bx)\otimes_A(yc)=b((x\otimes_A y)c)$$

rezultă că $M\otimes_A N$ devine bimodul B-stâng şi C-drept. ■

Observația 6.22. Analog se probează că:

(i) Dacă M este un A, B-modul drept şi N un (A, C)-bimodul atunci $M\otimes_A N$ devine B-modul drept şi C-modul stâng definind pentru $x\in M$, $y\in N$, $b\in B$ şi $c\in C$

$$(x\otimes_A y)b=(xb)\otimes_A y \text{ şi } c(x\otimes_A y)=x\otimes_A(yc)$$

(ii) Dacă M este un A, B-modul drept şi N un A, C-modul stâng atunci $M\otimes_A N$ este un (C, B)-bimodul definind pentru $x\in M$, $y\in N$, $b\in B$ şi $c\in C$

$$(x\otimes_A y)b=(xb)\otimes_A y \text{ şi } c(x\otimes_A y)=x\otimes_A(cy)$$

(iii) Dacă M este un (B, A)-bimodul iar N este un A, C-modul stâng atunci $M\otimes_A N$ este B, C-modul stâng definind pentru $x\in M$, $y\in N$, $b\in B$ şi $c\in C$

$$b(x\otimes_A y)=(bx)\otimes_A y \text{ şi } c(x\otimes_A y)=x\otimes_A(cy).$$

Ținând cont de cele de mai înainte putem prezenta în continuare asociativitatea şi proprietatea de adjuncție a produsului tensorial.

Teorema 6.23. (*Asociativiatea produsului tensorial*). Fie A, B două inele, M un A-modul drept, N un (A, B)-bimodul iar P un B–modul stâng. Atunci există un izomorfism natural:

$$\boldsymbol{\varphi_{M,N,P}:M\otimes_A(N\otimes_B P)\to(M\otimes_A N)\otimes_B P}$$

$$\textbf{a.î. } \boldsymbol{\varphi_{M,N,P}[x\otimes_A(y\otimes_B z)]=(x\otimes_A y)\otimes_B z}$$

oricare ar fi $x\in M$, $y\in N$ şi $z\in P$.

În plus dacă M' este un alt A-modul drept, N' un (A, B)-bimodul, P' un B–modul stâng iar $f:M\to M'$ este morfism de A-module drepte, $g:N\to N'$ este morfism de (A, B)-bimodule şi $h:P\to P'$ este morfism de C-module stângi, atunci diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M\otimes_A(N\otimes_B P) \arrow[r, "\varphi_{M,N,P}"] \arrow[d, "f\otimes_A(g\otimes_B h)"'] & (M\otimes_A N)\otimes_B P \arrow[d, "(f\otimes_A g)\otimes_B h"] \\
M'\otimes_A(N'\otimes_B P') \arrow[r, "\varphi_{M',N',P'}"] & (M'\otimes_A N')\otimes_B P'
\end{tikzcd}$$

este comutativă.

Demonstrație. Pentru orice $x\in M$ aplicația $\varphi_x:N\times P\to(M\otimes_A N)\otimes_B P$ definită prin $\varphi_x(y, z)=(x\otimes_A y)\otimes_B z$ este în mod evident $\mathbb{Z}$-biliniară şi B-balansată. Din proprietatea de universalitate a produsului tensorial deducem că există un unic morfism de grupuri abeliene $u_x:N\otimes_B P\to(M\otimes_A N)\otimes_B P$ a.î. $u_x(y\otimes z)=(x\otimes_A y)\otimes_B z$ pentru orice $y\in N$ şi $z\in P$.

Definim acum $\psi:M\times(N\otimes_B P)\to(M\otimes_A N)\otimes_B P$ prin $\psi\left(x, \sum_{\substack{i\in I \\ I \text{ finita}}}(y_i\otimes_B z_i)\right)=u_x\left(\sum_{i\in I}(y_i\otimes_B z_i)\right)=\sum_{i\in I}(x\otimes_A y_i)\otimes_B z_i$ (cu $y_i\in N$ şi $z_i\in P$) care este $\mathbb{Z}$-biliniară şi A-balansată.

Există atunci un morfism de grupuri $\varphi_{M,N,P}:M\otimes_A(N\otimes_B P)\to(M\otimes_A N)\otimes_B P$ a.î. $\varphi_{M,N,P}(x\otimes_A(y\otimes_B z))=(x\otimes_A y)\otimes_B z$ pentru orice $x\in M$, $y\in N$ şi $z\in P$.

Analog se construieşte un alt morfism de grupuri $\varphi'_{M,N,P}:(M\otimes_A N)\otimes_B P\to M\otimes_A(N\otimes_B P)$ a.î.

$\varphi'_{M,N,P}((x\otimes_A y)\otimes_B z)=x\otimes_A(y\otimes_B z)$ pentru orice $x\in M$, $y\in N$ şi $z\in P$.

Deducem imediat (pe generatori la început) că $\varphi_{M,N,P}$ şi $\varphi'_{M,N,P}$ sunt una inversa celeilalte, de unde izomorfismul din enunț. Verificarea faptului că diagrama din enunț este comutativă este imediată. ■

Să considerăm acum A şi B două inele iar M un (A, B)-bimodul. Din cele expuse mai înainte avem functorul

$$F=(?)\otimes_A M:\mathbf{Mod_d(A)}\to \mathbf{Mod_d(B)}.$$

Teorema 6.24. (***Proprietatea de adjuncție***) **Cu notațiile anterioare functorul F este adjunct la stânga pentru $\mathbf{h^M:Mod_d(B)\to Mod_d(A)}$.**

Demonstrație. Trebuie să demonstrăm (vezi Capitolul 5, §4) că dacă M este un A-modul stâng, N un (A, B)-bimodul iar P un B-modul stâng atunci:

(i) Există un izomorfism natural de grupuri

$$\psi_{M,N,P}:\mathbf{Hom}_A(M, \mathbf{Hom}_B(N, P))\to\mathbf{Hom}_B(N\otimes_A M), P)$$

a.î. pentru orice $f\in\mathbf{Hom}_A(M, \mathbf{Hom}_B(N, P))$, $y\in N$ şi $x\in M$ să avem $\psi_{M,N,P}(f)(y\otimes x)=f(x)y$.

(ii) Dacă M' este un alt A-modul stâng, N' un alt (A, B)-bimodul iar P' un alt B–modul stâng, $f:M\to M'$ este un morfism de A-module stângi, $g:N\to N'$ este un morfism de (A, B)-bimodule şi $h:P\to P'$ este un morfism de B-module stângi, atunci diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Hom}_A(M, \mathbf{Hom}_B(N, P)) \arrow[r, "\psi_{M,N,P}"] \arrow[d, "\mathbf{Hom}(f, \mathbf{Hom}(g, h))"'] & \mathbf{Hom}_B(N\otimes_A M), P) \arrow[d, "(\mathbf{Hom}(g\otimes_A f), h)"'] \\
\mathbf{Hom}_A(M', \mathbf{Hom}_B(N', P')) \arrow[r, "\psi_{M',N',P'}"] & \mathbf{Hom}_B(N'\otimes_A M'), P')
\end{tikzcd}$$

este comutativă.

Într-adevăr, fie $f\in\mathbf{Hom}_A(M, \mathbf{Hom}_B(N, P))$ şi aplicaţia $\varphi_f:N\times M\to P$, $\varphi_f(y, x)=f(x)\cdot y$, pentru orice $x\in M$ şi $y\in N$ care în mod evident este $\mathbb{Z}$-biliniară şi A-balansată.

Din proprietatea de universalitate a produsului tensorial există un morfism de grupuri $\psi_f:N\otimes_A M\to P$ a.î. $\psi_f(y\otimes_A x)=f(x)\cdot y$ pentru orice $y\in N$ şi $x\in M$ (se observă de fapt că ψ_f este morfism de B-module stângi).

Definim atunci $\psi_{M,N,P}:\mathbf{Hom}_A(M, \mathbf{Hom}_B(N, P))\to\mathbf{Hom}_B(N\otimes_A M), P)$, $\psi_{M,N,P}(f)(y\otimes x)=\psi_f(y\otimes x)=f(x)y$ pentru orice $f\in\mathbf{Hom}_A(M, \mathbf{Hom}_B(N, P))$, $y\in N$ şi $x\in M$ care în mod evident este morfism de grupuri.

Construim de asemenea aplicaţia

$\psi'_{M,N,P}:\mathbf{Hom}_B(N\otimes_A M), P)\to\mathbf{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_B(N, P))$, $\psi'_{M,N,P}(g)(x)(y)=g(y\otimes_A x)$, pentru orice $g\in\mathbf{Hom}_B(N\otimes_A M, P)$, $y\in N$ şi $x\in M$.

Se verifică acum imediat că $\psi'_{M,N,P}$ este de asemenea morfism de grupuri şi că $\psi_{M,N,P}$ şi $\psi'_{M,N,P}$ sunt una inversa celeilalte, de unde concluzia că $\psi_{M,N,P}$ este izomorfism de grupuri şi cu aceasta am probat (i).

Verificarea lui (ii) nu ridică nici un fel de probleme ţinând cont de exemplu că Hom(g, h) acţionează pentru $\alpha\in \mathbf{Hom}_B(N, P)$ prin $\mathbf{Hom}(g, h)(\alpha)=h\circ\alpha\circ g$. ∎

Ţinând cont de Corolarul 6.8., (ii) deducem că are sens:

Definiţia 6.25. Un A-modul stâng N se zice *plat* dacă pentru orice monomorfism de A-module drepte $f:M\to M'$, $f\otimes 1_N$ este monomorfism.

Să facem acum pregătirile necesare pentru a pune în evidenţă anumite clase de A-module plate precum şi conexiunile între modulele plate, libere şi proiective.

Din Propoziţiile 3.11., 6.14 şi 6.15. deducem imediat:

Propoziţia 6.26. Orice sumă directă de module plate este modul plat.

Deoarece A este A-modul plat (conform Propoziţiilor 6.12. şi 6.13.) din propoziţia de mai sus deducem:

Corolar 6.27. (i) Orice modul liber este plat

(ii) Orice modul proiectiv este plat.

Propoziţia 6.28. Fie A, B două inele, N un (A, B)-bimodul iar G un B-modul drept care este cogenerator injectiv în $\mathbf{Mod}_d(B)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) N este A-modul stâng plat

(ii) A-modulul drept $N^*=\mathbf{Hom}_B(N, G)$ este injectiv.

Demonstraţie. În $\mathbf{Mod}_d(A)$ considerăm şirul exact $0\longrightarrow M'\xrightarrow{f} M\xrightarrow{g} M''\longrightarrow 0$ şi diagrama comutativă construită în mod canonic:

$$\begin{array}{ccccccc}
0\to & \mathbf{Hom}_A(M'', N^*) & \xrightarrow{h_{N^*}(g)} & \mathbf{Hom}_A(M, N^*) & \xrightarrow{h_{N^*}(f)} & \mathbf{Hom}_A(M', N^*) \\
& \downarrow{\scriptstyle \psi_{M'',N,G}} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{M,N,G}} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{M',N,G}} \\
0\to & \mathbf{Hom}_B(M''\otimes_A N, G) & \xrightarrow{h_G(g\otimes_A 1_N)} & \mathbf{Hom}_B(M\otimes_A N, G) & \xrightarrow{h_G(f\otimes_A 1_N)} & \mathbf{Hom}_B(M'\otimes_A N, G)
\end{array}$$

cu liniile exacte iar coloanele izomorfisme (conform Teoremei 6.24.). Echivalența lui (i) cu (ii) rezultă acum imediat din Propozițiile 5.19. şi 5.42. ■

Corolar 6.29. Fie N un A-modul stâng iar G un generator injectiv din $\mathbf{Mod_d}(\mathbb{Z})$. Atunci N este plat dacă şi numai dacă A-modulul drept $\mathbf{Hom}_{\mathbb{Z}}\mathbf{(N, G)}$ este injectiv.

Observația 6.30. În [17, p.141] se demonstrează că orice A-modul stâng plat şi de prezentare finită (adică există un şir exact $L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ cu L_0, L_1 A-module libere de tip finit), este proiectiv.

§7. Module libere de rang finit. Matricea de trecere de la o bază la alta. Formula de schimbare a coordonatelor unui element la schimbarea bazelor. Lema substituției. Matricea ataşată unei apicații liniare între module libere de rang finit; formula de schimbare a acesteia la schimbarea bazelor.

În §2, prin *A-modul liber de rang finit* am înțeles un A-modul liber L ce admite o bază finită şi se bucură de proprietatea de invarianță a numărului de elemente din acea bază (acest număr a fost notat prin $\mathbf{rang_A(L)}$).

Conform Teoremei 2.25., dacă A este un inel comutativ (cu $0\neq 1$), atunci orice A-modul L ce admite o bază finită este de rang finit. În cazul în care A este corp şi deci L este spațiu vectorial peste A, atunci $\mathbf{rang_A(L)}=\mathbf{dim_A(L)}$ (vezi Definiția 1.21.).

Astfel, în cadrul acestui paragraf prin A vom desemna un inel comutativ cu $0\neq 1$.

Fie L un A-modul liber de rang n ($n\geq 1$) iar $B=\{e_1, \ldots, e_n\}$ şi $B'=\{e_1', \ldots, e_n'\}$ două baze ale lui L.

Există atunci elementele a_{ij} ($1\leq i, j\leq n$) din A a.î.

$$e_1'=a_{11}e_1+\ldots+a_{1n}e_n$$
$$e_2'=a_{21}e_1+\ldots+a_{2n}e_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$e_n'=a_{n1}e_1+\ldots+a_{nn}e_n\ .$$

Definiția 7.1. Matricea $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $\in M_n(A)$ **poartă numele de *matricea de trecere de la baza B la baza B′* şi se notează prin M(B, B′).**

Să fixăm acum anumite notații:

Dacă $x\in L$ atunci există şi sunt unice elementele $\alpha_1, \ldots,\alpha_n\in A$ a.î. $x=\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_ne_n$. Elementele $\alpha_1, \ldots,\alpha_n\in A$ se vor numi *coordonatele lui x în baza B.* Convenim să desemnăm lucrul acesta scriind

$$x_B=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}\in M_{n,1}(A).$$

Din rațiuni de tehnoredactare convenim de asemenea să scriem $\widetilde{x}_B={}^tx_B=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.

Teorema 7.2. Fie L un A-modul liber de rang n iar $B=\{e_1, \ldots, e_n\}$ şi $B'=\{e_1',\ldots, e_n'\}$ două baze ale sale. Atunci:

(i) Matricea M(B, B′) de trecere de la B la B′ este inversabilă, inversa sa fiind M(B′, B)

(ii) Dacă $x\in L$ atunci

$$x_{B'}=M(B, B')^{-1}\cdot x_B$$

(iii) Dacă în L mai avem o a treia bază B″, atunci

$$M(B, B'')=M(B, B')\cdot M(B', B'').$$

Demonstrație. (i). Pentru orice $1\leq i\leq n$ avem:

(1) $$e_i'=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_j$$ şi

$$(2) \qquad e_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} e_j'$$

Atunci $M(B, B')=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots. & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ iar

$$M(B', B)=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ \dots & \dots & \dots. & \dots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dacă în (1) înlocuim pentru fiecare $1 \le j \le n$ pe e_j cu valorile date de (2) obținem pentru fiecare $1 \le i \le n$ egalitățile:

$$e_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{jk} e_k' \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) e_k'$$

de unde cu necesitate:

$$(3) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \begin{cases} 1 & pentru \quad k = i \\ 0 & pentru \quad k \neq i \end{cases}.$$

Egalitățile de la (3) ne arată că $M(B, B')\cdot M(B', B)=\mathbf{I_n}$ ($\mathbf{I_n}$ fiind maticea unitate ce are pe diagonala principală 1 şi 0 în rest), de unde deducem că $M(B, B')$ este inversabilă având inversa $M(B', B)$.

(ii). Dacă $x \in L$, atunci există $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ a.î. $x=\alpha_1 e_1+\dots+\alpha_n e_n= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$.

Ținând cont de (2) deducem că

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} e_j' \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_{ij} \right) e_j' \text{, adică}$$

$$x_{B'}=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_{i1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} =M(B', B)\cdot x_B=M(B, B')^{-1}\cdot x_B.$$

(iii). Se verifică direct prin calcul (analog ca la (i)). ■

Vom considera acum K un corp comutativ, V un K-spaţiu vectorial de dimensiune finită iar $B=\{e_1, \dots, e_n\}\subset V$ o bază a lui V. Astfel, pentru orice vector $v\in V$ există şi sunt unice elementele (scalarii) $\alpha_1, \dots, \alpha_n\in K$ a.î. $v=\alpha_1e_1+\dots+\alpha_ne_n$. Reamintim că am notat $v_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ iar prin $\widetilde{v}_B={}^t v_B =(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Următoarea observaţie este imediată şi foarte utilă:

Observaţia 7.3. Dacă $v_1, v_2, \dots, v_n\in V$ şi $v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j$, $1\le i\le n$, atunci $\{v_1, \dots, v_n\}$ formează o nouă bază pentru V dacă şi numai dacă

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

În continuare vom prezenta un rezultat fundamental pentru metodele numerice ale algebrei liniare cunoscut sub numele de *lema substituţiei*.

Lema 7.4. (*Lema substituţiei*) Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune finită, $B=\{e_1, \dots, e_n\}\subset V$ o bază a lui V, $v=\alpha_1e_1+\dots+\alpha_ne_n \in V$ iar pentru $1\le i\le n$ notăm prin $B_i=\{e_1, \dots, e_{i-1}, v, e_{i+1},\dots, e_n\}$. Atunci pentru $1\le i\le n$:

(i) B_i formează o nouă bază pentru V dacă şi numai dacă $\alpha_i\neq 0$

(ii) Dacă $\alpha_i\neq 0$ şi pentru $x\in V$, $\widetilde{x}_B =(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, atunci $\widetilde{x}_{B_i} =(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$ unde $\lambda'_i = \lambda_i / \alpha_i$ iar $\lambda'_j = \lambda_j - \alpha_j \lambda_i / \alpha_i$ pentru $1\le j\le n$, $j\neq i$ (unde pentru $a, b\in K$, $b\neq 0$ prin a / b desemnăm elementul ab^{-1}).

Demonstraţie. (i). Determinantul coordonatelor vectorilor din B_i în baza B este:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} = \alpha_i$$

şi acum totul rezultă din Observaţia 7.3..

(ii). Fie $x \in V$, $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_i e_i + \dots + \lambda_n e_n$.

Din $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_i e_i + \dots + \alpha_n e_n$ deducem imediat că

$$\alpha_i e_i = v - \alpha_1 e_1 - \dots - \alpha_{i-1} e_{i-1} - \alpha_{i+1} e_{i+1} - \dots - \alpha_n e_n ,$$

deci $e_i = (1/\alpha_i)v - (\alpha_1/\alpha_i)e_1 - \dots - (\alpha_{i-1}/\alpha_i)e_{i-1} - (\alpha_{i+1}/\alpha_i)e_{i+1} - \dots -(\alpha_n/\alpha_i)e_n$ şi astfel $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_i e_i + \dots + \lambda_n e_n = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_i [(1/\alpha_i)v - (\alpha_1/\alpha_i)e_1 - \dots - -(\alpha_{i-1}/\alpha_i)e_{i-1} - (\alpha_{i+1}/\alpha_i)e_{i+1} - \dots - (\alpha_n/\alpha_i)e_n] + \dots + \lambda_n e_n = [\lambda_1 - (\lambda_i \alpha_1)/\alpha_i]e_1 + \dots + [\lambda_{i-1} - (\lambda_i \alpha_{i-1})/\alpha_i]e_{i-1} + (\lambda_i/\alpha_i)v + [\lambda_{i+1} - (\lambda_i \alpha_{i+1})/\alpha_i]e_{i+1} + \dots + [\lambda_n - -(\lambda_i \alpha_n)/\alpha_i]\, e_n$, de unde deducem imediat formula din enunţ. ■

În practică, lema substituţiei se aplică punând în evidenţă următorul tabel:

B	v	x
e_1	α_1	λ_1
…	…	…
e_i	α_i	λ_i
…	…	…
e_j	α_j	λ_j
…	…	…
e_n	α_n	λ_n
e_1	0	$\lambda'_1 = \lambda_1 - (\alpha_1\lambda_1) / \alpha_1$
…	…	…………..
v	1	$\lambda'_i = \lambda_i / \alpha_i$
…	…	…………..
e_j	0	$\lambda'_j = \lambda_j - (\alpha_j\lambda_i) / \alpha_i$
…	…	…………..
e_n	0	$\lambda'_n = \lambda_n - (\alpha_n\lambda_i) / \alpha_i$

În cazul în care $\alpha_i \neq 0$, elementul α_i se va numi *pivot.*

Se observă deci că noile coordonate ale lui x în baza B_i se pun în evidență în tabelul de mai sus astfel:

1) Pe linia i a pivotului împărțim toate elemntele la pivotul α_i.

2) Pe oricare altă linie j cu $j \neq i$ coordonata de ordin j a lui x în noua bază B_i se obține după regula: „*vechea coordonată minus produsul proiecțiilor împărțit la pivot*” (interpretând pe α_j şi λ_i ca fiind „proiecțiile” pivotului α_i pe linia şi coloana pivotului). În anumite lucrări, această operație este cunoscută sub numele de „*regula dreptunghiului*” deoarece pentru $i \neq j$ putem scrie

$$\lambda'_j = \lambda_j - (\alpha_j \lambda_i)/\alpha_i = \left(\frac{1}{\alpha_i}\right) \det\begin{pmatrix} \alpha_i & \lambda_i \\ \alpha_j & \lambda_j \end{pmatrix}$$

şi astfel se obține „dreptunghiul” $\Delta_{ij} = \det\begin{pmatrix} \alpha_i & \lambda_i \\ \alpha_j & \lambda_j \end{pmatrix}$ şi regula de obținere a lui λ'_j se poate enunța astfel: „*produsul elementelor de pe diagonala principală a lui Δ_{ij} minus produsul elementelor de pe diagonala secundară a lui Δ_{ij} şi ceea ce se obține se împarte la pivot*”.

Ca o primă aplicație a lemei substituției vom stabili dacă un anumit număr de vectori din V sunt sau nu liniar independenți.

Pentru aceasta vedem cîți dintre aceşti vectori pot înlocui vectorii din baza inițială (cu ajutorul lemei substituției) şi cîți vor verifica această condiție atîția vor fi liniar independenți. În mod evident, dacă numărul acestora coincide cu dimensiunea lui V, atunci ei vor forma o nouă bază pentru V.

De exemplu în $\mathbb{R}^3$ să considerăm baza canonică $e_1=(1, 0, 0)$, $e_2=(0, 1, 0)$, $e_3=(0, 0, 1)$ şi vectorii $v_1=(3, -2, 1)$, $v_2=(1, -1, 0)$, $v_3=(-1, 1, 1)$ şi $v=(1, 2, 3)$. Ne propunem să vedem dacă vectorii v_1, v_2, v_3 formează o nouă bază pentru $\mathbb{R}^3$ în care caz să deducem şi coordonatele lui v în această bază.

Ținând cont de cele stabilite mai înainte facem o serie de calcule puse sub forma următorului tabel:

B	v_1	v_2	v_3	v
e_1	3	1	-1	1
e_2	-2	-1	1	2
e_3	1	0	1	3
v_1	1	1/3	-1/3	1/3
e_2	0	-1/3	1/3	8/3
e_3	0	-1/3	4/3	8/3
v_1	1	0	0	3
v_2	0	1	-1	-8
e_3	0	0	1	0
v_1	1	0	0	3
v_2	0	1	0	-8
v_3	0	0	1	0

În concluzie, vectorii $\{v_1, v_2, v_3\}$ formează o nouă bază pentru $\mathbb{R}^3$ iar coordonatele lui v în această bază sunt 3, -8, 0.

Într-adevăr, $3\cdot v_1 + (-8)\cdot v_2 + 0\cdot v_3 = 3\cdot(3, -2, 1) - 8\cdot(1, -1, 0) = =(9, -6, 3) + (-8, 8, 0) = (1, 2, 3) = v$.

Pe parcursul acestei lucrări vom mai prezenta şi alte aplicaţii ale lemei substituţiei.

Fie acum L şi L′ două A-module libere de rang finit, $B=\{e_1, \ldots, e_m\}$ o bază a lui L iar $B'=\{e_1',\ldots, e_n'\}$ o bază ale lui L′ iar $f:L\to L'$ un morfism de A-module.

Atunci, există elementele $a_{ij}\in A$ $(1\le i\le m,\ 1\le j\le n)$ a.î.:

$$f(e_1)=a_{11}e_1' + a_{12}e_2' + \ldots + a_{1n}e_n'$$
$$f(e_2)=a_{21}e_1' + a_{22}e_2' + \ldots + a_{2n}e'_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(e_m)=a_{m1}e_1' + a_{m2}e_2' + \ldots + a_{mn}e_n' .$$

Definiția 7.5. Matricea

$$\mathbf{M_f(B, B')}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots. & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\in \mathbf{M_{n,m}(A)}$$

poartă numele de ***matricea asociată lui f relativă la perechea de baze (B, B′)*** **.**

Propoziția 7.6. Dacă L şi L′ sunt două A-module libere de rang finit, de baze B={e₁, …, eₘ} şi respectiv B′={e₁′,…, eₙ′}, atunci oricare ar fi f, g∈Hom_A(L, L′) şi a∈A avem:

$$\mathbf{M_{f+g}(B, B')=M_f(B, B')+ M_g(B, B')} \quad \textbf{iar}$$

$$\mathbf{M_{a\,f}(B, B')=a\cdot M_f(B, B')}.$$

Demonstrație. Dacă alegem $M_f(B, B')=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}$ şi $M_g(B, B')=(b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}$, atunci avem egalitățile $f(e_j)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i'$ şi $g(e_j)=\sum_{i=1}^{n} b_{ij}e_i'$, $1\le j\le m$.

Egalitățile din enunț rezultă imediat ținând cont că pentru orice $1\le j\le m$ avem egalitățile:

$$(f+g)(e_j)=f(e_j)+g(e_j)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i' +\sum_{i=1}^{n} b_{ij}e_i' =\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})e_i' \text{ şi}$$

$$(af)(e_j)=a\cdot f(e_j)=a\cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i' =\sum_{i=1}^{n}(a\cdot a_{ij})e_i' . \ \blacksquare$$

Propoziția 7.7. Fie L, L′, L″ trei A-module libere de rang finit, de baze B, B′ şi B″. Atunci oricare ar fi f∈Hom_A(L, L′) şi g∈Hom_A(L′, L″) avem

$$\mathbf{M_{g\circ f}(B, B'')=M_g(B', B'')\cdot M_f(B, B')}.$$

Demonstrație. Alegem $B=\{e_1, \dots, e_m\}$, $B'=\{e_1', \dots e_n'\}$, $B''=\{e_1'', \dots e_p''\}$, $M_f(B, B')=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}$ şi $M_g(B', B'')=(b_{ij})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le n}}$ **.**

Acum, egalitatea din enunț rezultă imediat deoarece pentru orice $1\leq j\leq m$ avem $(g\circ f)(e_j)=g(f(e_j))=$

$$=g\left(\sum_{k=1}^{n}a_{kj}e_k'\right)=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}g\left(e_k'\right)=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\left(\sum_{i=1}^{p}b_{ik}e_i''\right)=\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{kj}\right)e_i'' \text{ . } \blacksquare$$

Fie acum L şi L′ sunt două A-module libere de rang finit de baze $B=\{e_1, \ldots, e_m\}$ şi respectiv $B'=\{e_1',\ldots, e_n'\}$. Dacă definim φ:**Hom**$_A$(L, L′)$\to M_{n,m}(A)$ prin $\varphi(f)=M_f(B, B')$ pentru orice $f\in$**Hom**$_A$(L, L′), atunci din Propoziția 6.4. deducem că φ este morfism de A-module. Cum în mod evident φ este şi bijecție, deducem următorul rezultat:

Corolar 7.8. Hom$_A$(L, L′) $\approx$ M$_{n,m}$(A) (izomorfism de A-module).

Din Propoziția 7.6. şi Propoziția 7.7. deducem imediat că dacă L este un A-modul liber de rang finit având baza $B=\{e_1, \ldots, e_n\}$, atunci definind ψ:**End**$_A$(L)$\to M_n(A)$ prin $\psi(f)=M_f(B, B)$, ψ este morfism de inele. Deoarece ψ este în mod evident şi bijecție deducem un alt rezultat asemănător celui de mai înainte:

Corolar 7.9. (i) End$_A$(L) $\approx$ M$_n$(A) (izomorfism de inele)

(ii) f$\in$End$_A$(L) este inversabil (adică este izomorfism de A-module) dacă şi numai dacă matricea M$_f$(B, B) este inversabilă în M$_n$(A).

Propoziția 7.10. Fie L şi L′ două A-module libere de rang finit de baze $B=\{e_1,\ldots,e_m\}$ şi respectiv $B'=\{e_1',\ldots,e_n'\}$ iar g$\in$Hom$_A$(L, L′).

Dacă $C=\{f_1, \ldots, f_m\}$ şi $C'=\{f_1',\ldots, f_m'\}$ reprezintă o altă pereche de baze pentru L şi respectiv L′, atunci

$$M_g(C, C')=M(B', C')^{-1}\cdot M_g(B, B')\cdot M(B, C).$$

Demonstrație. Dacă alegem $M(B, C)=\left(u_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq m}$, M(B′, C′)$=\left(v_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$, M_g(B, B′)$=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}$, M_g(C, C′)$=\left(a_{ij}'\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}$, atunci avem egalitățile: $f_i=\sum_{j=1}^{n}u_{ji}e_j$ (1≤i≤m), $f_i'=\sum_{j=1}^{n}v_{ji}e_j'$ (1≤i≤n), $g(e_i)=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}e_j'$ (1≤i≤m) şi $g(f_i)=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}'f_j'$ (1≤i≤m).

Deducem imediat că pentru orice 1≤j≤m avem

$$g(f_j)=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}'f_k'=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}'\left(\sum_{i=1}^{n}v_{ik}e_i'\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}v_{ik}a_{kj}'\right)e_i'$$

iar pe de altă parte

$$g(f_i)=g\left(\sum_{k=1}^{n}u_{kj}e_k\right)=\sum_{k=1}^{m}u_{kj}g(e_k)=\sum_{k=1}^{m}u_{kj}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ik}e_i'\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}a_{ik}u_{kj}\right)e_i',$$

de unde egalitățile $\sum_{k=1}^{n}v_{ik}a_{kj}'=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}u_{kj}$ oricare ar fi 1≤i≤n şi 1≤j≤m. Aceste ultime egalități ne arată că avem egalitatea matriceală

$$M(B', C')\cdot M_g(C, C')=M_g(B, B')\cdot M(B, C)$$

echivalentă cu cea din enunț. ■

Corolar 7.11. Dacă L este un A-modul liber de rang finit având două baze B şi B′ atunci pentru orice f∈End$_A$(L) avem:

$$\mathbf{M_g(B', B')=M(B, B')^{-1}\cdot M_g(B, B)\cdot M(B, B')}.$$

Observația 7.12. Deoarece spațiile vectoriale de dimensiune finită peste un corp comutativ şi netrivial sunt cazuri particulare de module libere de rang finit, deducem că toate rezultatele din acest paragraf sunt adevărate şi pentru spații vectoriale (de dimensiune finită).

CAPITOLUL 2 : DETERMINANȚI. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE.

§1. Definiția unui determinant de ordin n. Proprietățile determinanților. Dezvoltarea unui determinant după elementele unei linii. Regula lui Laplace. Formula Binet-Cauchy.

În cadrul acestui paragraf prin A vom desemna un inel comutativ şi unitar.

Definiția 1.1. Dacă $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$ şi $M=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\in M_n(A)$, atunci prin *determinantul matricei M* notat det(M) înțelegem elementul

$$\det(M)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}\in A$$

(unde prin S_n am notat mulțimea permutărilor asupra mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ iar pentru $\sigma\in S_n$, sgn(σ) reprezintă *signatura* permutării σ).

Convenim să notăm **det**(M)= $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ (sau condensat, **det**(M)=$|a_{ij}|_{1\leq i,j\leq n}$).

Asociind la fiecare $M\in \mathbf{M_n}(A)$ elementul **det**(M)∈A, obținem o funcție **det**:$\mathbf{M_n}(A)\to A$ numită *funcția determinant*.

De exemplu, dacă n=2 şi M=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, atunci **det**(M)=$a_{11}a_{22}$-$a_{12}a_{21}$ iar dacă n=3 şi M=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, atunci:

$$\mathbf{det}(M)=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Produsul $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}$ poartă numele de *termen* al lui **det**(M). Astfel, **det**(M) este suma a n! termeni dintre care $\frac{n\,!}{2}$ apar în **det**(M) cu semnul (+) iar $\frac{n\,!}{2}$ cu semnul (-).

Dacă n=1, adică $M=(a_{11})$ convenim să definim **det**$(M)=a_{11}$.

În cele ce urmează vom pune în evidență principalele proprietăți ale determinanților.

Propoziția 1.2. Pentru orice $M\in M_n(A)$, det$({}^tM)$=det(M) (unde prin ${}^tM$ am notat transpusa matricei M).

Demonstrație. Fie $M=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ şi ${}^tM=({}^ta_{ij})_{1\le i,j\le n}$ unde prin ${}^ta_{ij}$ am notat elementul a_{ji}.

Avem

$$\mathbf{det}({}^tM)=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\ {}^ta_{1\sigma(1)}\,{}^ta_{2\sigma(2)}\ldots{}^ta_{n\sigma(n)}=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\ldots a_{\sigma(n)n}=$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)\sigma^{-1}(\sigma(1))}a_{\sigma(2)\sigma^{-1}(\sigma(2))}\ldots a_{\sigma(n)\sigma^{-1}(\sigma(n))}=\sum_{\sigma^{-1}\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma^{-1})a_{1\sigma^{-1}(1)}a_{2\sigma^{-1}(2)}\ldots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

=**det**(M) (deoarece atunci când σ parcurge S_n şi σ^{-1} parcurge bijectiv pe S_n iar $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1})=\mathrm{sgn}(\sigma)$). ■

Observația 1.3. Egalitatea **det**$({}^tM)$=**det**(M) ne arată că ori de cîte ori avem o proprietate adevărată referitoare la liniile unui determinant, aceeaşi proprietate este adevărată şi pentru coloanele determinantului. Din această cauză în continuare vom prezenta principalele proprietăți ale determinanților referitoare la linii, rezultând tacit că acestea sunt adevărate şi pentru coloane.

Propoziția 1.4. (i) Dacă toate elementele unei linii dintr-o matrice sunt nule, atunci determinantul matricei este nul

(ii) Dacă într-o matrice schimbăm două linii între ele, matricea astfel obținută are determinantul egal cu opusul determinantului matricei inițiale.

(iii) Dacă o matrice are două linii identice, atunci determinatul său este nul

(iv) Dacă toate elementele unei linii a unei matrice conțin factor comun un element $a\in A$, atunci acel element poate fi scos în fața determinantului matricei

(v) Dacă elementele a două linii ale unei matrice sunt proporționale, atunci determinantul său este nul.

Demonstrație. (i). Dacă de exemplu, toate elementele de pe linia i a matricei M sunt egale cu 0, atunci cum fiecare termen al determinantului conține ca factor şi un element al liniei i deducem că $\mathbf{det}(M)=0$.

(ii). Fie M_{ij} matricea ce se obține din matricea $M=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ schimbând între ele liniile i şi j.

Avem $\mathbf{det}(M_{ij})=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{j\sigma(i)}...a_{i\sigma(j)}...a_{n\sigma(n)}$

Dacă considerăm transpoziția $\varepsilon=(i\ j)$ (ce duce pe i în j, pe j în i şi lasă pe loc restul elementelor din $\{1, 2, \ldots, n\}$) atunci putem scrie $\mathbf{det}(M_{ij})=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1(\sigma\circ\varepsilon)(1)}a_{2(\sigma\circ\varepsilon)(2)}...a_{n(\sigma\circ\varepsilon)(n)}=-\sum_{\tau\in S_n}\mathrm{sgn}(\tau)a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}...a_{n\tau(n)}=$

$=-\mathbf{det}(M)$ (deoarece atunci când σ parcurge pe S_n, $\sigma\circ\varepsilon=\tau$ parcurge bijectiv pe S_n iar $\mathrm{sgn}(\tau)=\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\mathrm{sgn}(\varepsilon)=-\mathrm{sgn}(\sigma)$).

(iii). Dacă matricea M are identice liniile i şi j, atunci schimbând între ele aceste linii trebuie după ii) ca $\mathbf{det}(M)=-\mathbf{det}(M)$, de unde deducem că $\mathbf{det}(M)=0$ (evident în ipoteza că inelul A nu este de caracteristică 2).

(iv). Fie $M=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ iar M' matricea ce diferă de M prin aceea că în locul liniei $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ are linia $(aa_{i1}, aa_{i2}, \ldots, aa_{in})$. Atunci $\mathbf{det}(M')=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...(aa_{i\sigma(i)})...a_{n\sigma(n)}=a\cdot\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}=$

$=a\cdot\mathbf{det}(M)$.

(v). Rezultă imediat din (iv) şi (iii). ■

Fie acum $M=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\in\mathbf{M_n}(A)$ şi să presupunem că elementele liniei i se scriu sub forma $a_{ij}=a_{ij}'+a_{ij}''$ pentru fiecare $1\leq j\leq n$.

Dacă notăm cu M′ (respectiv M″) matricea care se obține din M înlocuind elementele de pe linia i cu elementele (a_{ij}') (respectiv (a_{ij}'')) ($1 \le j \le n$) atunci avem următorul rezultat:

Propoziția 1.5. det(M)=det(M′)+det(M″).

Demonstrație. Avem **det**(M)= $\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{i\sigma(i)} \ldots a_{n\sigma(n)} =$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots \left(a'_{i\sigma(i)} + a''_{i\sigma(i)}\right) \ldots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a'_{i\sigma(i)} \ldots a_{n\sigma(n)} +$$

$$+ \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a''_{i\sigma(i)} \ldots a_{n\sigma(n)} = \mathbf{det}(M') + \mathbf{det}(M''). \ \blacksquare$$

Corolar 1.6. (i) Dacă o linie a unei matrice pătratice este o combinație liniară de celelalte linii, atunci determinantul matricei este nul.

(ii) Dacă la o linie a unei matrice pătratice adăugăm o combinație liniară de alte linii, determinantul matricei nu se schimbă.

Observația 1.7. Sintetizând proprietățile de mai sus ale determinanților avem următoarele proprietăți principale ale determinanților:

Proprietatea 1: Dacă într-un determinant schimbăm liniile cu coloanele, determinantul nu-şi modifică valoarea.

Proprietatea 2: Dacă toate elementele unei linii a unui determinant sunt nule, atunci şi determinantul este nul.

Proprietatea 3: Dacă într-un determinant schimbăm două linii între ele, determinantul îşi schimbă doar semnul.

Proprietatea 4: Într-un determinant factorii comuni se scot pe linii.

Proprietatea 5: Dacă într-un determinant două linii sunt proporționale, atunci determinantul este nul.

Proprietatea 6: Dacă toate elementele unei linii a unui determinant se scriu ca sumă de două elemente atunci şi determinantul se scrie ca sumă de doi determinanți.

Proprietatea 7: Dacă o linie a unui determinant este o combinație liniară de celelelte linii, atunci determinantul este nul.

Proprietatea 8: Dacă într-un determinant la o linie adăugăm o combinație liniară de alte linii, atunci determinantul nu-şi schimbă valoarea.

Observația 1.8. În cazul determinanților de ordinul 3 există două reguli simple de calcul a acestora cunoscute sub numele de *regula lui Sarrus* şi respectiv *regula triunghiului*.

Pentru *regula lui Sarrus* se procedează astfel:

Dacă $M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ atunci adăugând primele două linii la M obținem matricea de ordinul (5, 3):

$$M'=\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} \\ & \ddots & & & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} \\ & \ddots & & \ddots & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} \\ & \ddots & & \ddots & \\ a_{11} & & a_{12} & & a_{13} \\ & & & \ddots & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Termenii cu (+) din dezvoltarea lui **det**(M) sunt cei ce se obțin înmulțind elementele de pe diagonala principală a lui M şi cele ale „diagonalelor paralele” cu aceasta din M' iar cei cu (-) se obțin înmulțind elementele de pe diagonala secundară lui M şi cele ale „diagonalelor paralele” cu aceasta din M'. De exemplu, dacă

$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ atunci

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ & \ddots & \\ -2 & 1 & 1 \\ & \ddots & \ddots \\ 2 & -1 & 4 \\ & \ddots & \ddots \\ 1 & 2 & -3 \\ & \ddots & \ddots \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ şi astfel}$$

det(M)=1·1·4+(-2)·(-1)·(-3)+2·2·1-(-3)·1·2-1·(-1)·1-4·2·(-2)=4-6+4+ +6+1+16 = 25.

Pentru *regula triunghiului* se procedează astfel:

Se consideră $M = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} \\ & \ddots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \ddots & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} \end{pmatrix}$ şi se observă că tripletele (a_{13}, a_{21}, a_{32}) şi (a_{31}, a_{12}, a_{23}) formează două „triunghiuri" cu vârfurile în a_{13} şi respectiv a_{31} şi cu bazele „paralele" cu diagonala principală, astfel că termenii din dezvoltarea lui det(M) ce apar cu semnul plus pot fi individualizaţi astfel: produsul elementelor de pe diagonala principală precum şi produsele celor două triplete ce formează două triunghiuri cu bazele paralele cu diagonala principală. Cele cu semnul minus vor fi: produsul elementelor de pe diagonala secundară precum şi cele două produse ale tripletelor (a_{11}, a_{32}, a_{23}) şi (a_{33}, a_{21}, a_{12}) ce formează două triunghiuri cu vârfurile în a_{11} şi respectiv a_{33} şi cu bazele „paralele" cu diagonala secundară.

În continuare vom prezenta un procedeu recursiv de calcul al unui determinant de ordinul n prin care calculul acestuia se reduce la calculul a n determinanţi de ordinul n-1.

Fie deci $M=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in \mathbf{M_n}(A)$ $(n\ge 2)$ şi $d=\mathbf{det}(M)=|a_{ij}|_{1\le i,j\le n}$.

Definiția 1.9. Numim *minor complementar* al elementului a_{ij} în det(M) elementul notat d_{ij} ce se obține calculând determinantul de ordinul n-1 obținut prin eliminarea din det(M) a liniei i şi coloanei j ($1 \leq i, j \leq n$).

Elementul $\delta_{ij}=(-1)^{i+j}d_{ij}$ se numeşte *complementul algebric* al lui a_{ij} în det(M).

Teorema 1.10. Dacă $M=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\in M_n(A)$, atunci pentru orice $1\leq i\leq n$ avem egalitatea:

$$\mathbf{det}(M)=a_{i1}\delta_{i1}+a_{i2}\delta_{i2}+\ldots+a_{in}\delta_{in}.$$

Demonstrație. Avem $\mathbf{det}(M)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}$ şi să notăm pentru $1\leq i\leq n$, $s_i=a_{i1}\delta_{i1}+a_{i2}\delta_{i2}+\ldots+a_{in}\delta_{in}$.

Ideea de demonstrație a egalității **det**(M)$=s_i$ este următoarea: vom arăta că fiecare termen de forma $a_{ij}\delta_{ij}$ al sumei s_i este suma a (n-1)! termeni din dezvoltarea lui **det**(M) având acelaşi semn ca şi cei din dezvoltarea lui **det**(M) iar pentru două valori diferite ale indicelui j avem termeni diferiți din dezvoltarea lui **det**(M). O dată stabilit lucrul acesta, egalitatea **det**(M)$=s_i$ se probează astfel: suma s_i are $n\cdot(n-1)!=n!$ termeni identici şi cu acelaşi semn ca şi termenii ce ne dau dezvoltarea lui **det**(M), deci cu necesitate **det**(M)$=s_i$.

Să ne ocupăm la început de termenul $a_{11}\delta_{11}$.

Avem $a_{11}\delta_{11}=a_{11}\sum_{\tau}\operatorname{sgn}(\tau)a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)}\ldots a_{n\tau(n)}=\sum_{\tau}\operatorname{sgn}(\tau)a_{11}a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)}\ldots a_{n\tau(n)}$

(sumarea făcându-se după toate permutările τ asupra mulțimii {2, 3, …, n}). Se observă că cei (n-1)! termeni ce apar în dezvoltarea lui $a_{11}\delta_{11}$ sunt termeni ce apar şi în dezvoltarea lui **det**(M).

Să arătăm că aceştia apar cu acelaşi semn ca şi în dezvoltarea lui **det**(M). Pentru o permutare τ asupra mulțimii {2, 3, …, n} semnul termenului $a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)}\ldots a_{n\tau(n)}$ din dezvoltarea lui δ_{11} este sgn(τ), deci semnul termenului $a_{11}a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)}\ldots a_{n\tau(n)}$ provenit din produsul $a_{11}\delta_{11}$ este egal cu sgn(τ).

Pe de altă parte, semnul termenului $a_{11}a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)}...a_{n\tau(n)}$ în dezvoltarea lui **det**(M) este egal cu sgn(τ′) unde $\tau' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 1 & \tau(2) & \tau(3) & ... & \tau(n) \end{pmatrix}$ şi avem în mod evident sgn(τ)=sgn(τ′).

Pentru cazul general al produsului $a_{ij}\delta_{ij}$ procedăm astfel: schimbăm liniile şi coloanele în aşa fel încît elementul a_{ij} să vină în locul elementului a_{11} şi minorul d_{ij} să rămînă neschimbat. În felul acesta linia i şi coloana j devin linia 1 şi respectiv coloana 1; linia 1 devine linia 2, linia 2 devine linia 3, …, linia i-1 devine linia i; coloana 1 devine coloana 2, coloana 2 devine coloana 3,…, coloana j-1 devine coloana j, astfel că dacă notăm prin d′ determinantul obținut prin astfel de schimbări avem **det**(M)=$(-1)^{i+j}$d′ şi în plus $d'_{11}=d_{ij}$.

Dacă $a_{1k_1}a_{2k_2}...a_{i-1\ k_{i-1}}a_{i+1\ k_{i+1}}...a_{nk_n}$ este un termen oarecare din dezvoltarea determinantului d_{ij} din egalitatea **det**(M)=$(-1)^{i+j}$d′ şi ținând cont de prima parte a demonstrației deducem că semnul termenului $(-1)^{i+j}a_{1k_1}a_{2k_2}...a_{i-1\ k_{i-1}}a_{ij}a_{i+1\ k_{i+1}}...a_{nk_n}$ provenit din produsul $a_{ij}\delta_{ij}$ este acelaşi cu cel dat de dezvoltarea determinantului d. Astfel, demonstrația teoremei este completă. ■

Corolar 1.11. Dacă $1\leq i\neq j\leq n$, atunci

$$a_{j1}\delta_{i1}+a_{j2}\delta_{i2}+\ldots+a_{jn}\delta_{in}=0.$$

Demonstrație. Conform Teoremei 1.10. avem

$$(\star)\ \mathbf{det}(M)=a_{i1}\delta_{i1}+a_{i2}\delta_{i2}+\ldots+a_{in}\delta_{in}.$$

Deoarece δ_{i1}, δ_{i2} ,…, δ_{in} nu conțin elementele a_{i1}, a_{i2},…, a_{in}, egalitatea (⋆) este de fapt o identitate în a_{i1}, a_{i2},…, a_{in} .

Astfel, $a_{j1}\delta_{i1}+a_{j2}\delta_{i2}+\ldots+a_{jn}\delta_{in}$ va fi un determinant ce are linia i formată din elementele a_{j1}, a_{j2},…,a_{jn} şi cum $j\neq i$ avem atunci două linii identice (linia j şi linia i ce coincide cu linia j), de unde deducem că $a_{j1}\delta_{i1}+a_{j2}\delta_{i2}+\ldots+a_{jn}\delta_{in}=0$ (conform Proprietății 5). ■

Sumând cele stabilite anterior, avem următorul rezultat important:

Teorema 1.12. Dacă $M=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in M_n(A)$, atunci pentru orice $1\le i, j\le n$ avem

$$a_{j1}\delta_{i1}+a_{j2}\delta_{i2}+\ldots+a_{jn}\delta_{in}=\begin{cases}\det(M) & pentru\ \ j=i\\ 0 & pentru\ \ j\ne i\end{cases}.$$

În continuare vom prezenta o generalizare a celor stabilite în Teorema 1.10. ce ne dă dezvoltarea unui determinant după o linie. Mai precis vom prezenta o regulă de dezvoltare a unui determinant după mai multe linii (aşa zisa *regulă a lui Laplace*).

Înainte de a enunţa regula lui Laplace vom defini noţiunile de *minor de ordin k* ($k\le n-1$), *minor complementar* şi *complement algebric* pentru un minor complementar de ordin k (care generalizează de fapt noţiunile definite mai înainte).

Să alegem o matrice $M\in \mathbf{M_n}(A)$ ($n\ge 2$) şi să fixăm k linii i_1, $i_2,\ldots, i_k$ şi k coloane $j_1, j_2,\ldots, j_k$ ($k\le n-1$) distincte.

Elementele ce se află la intersecţia liniilor i_1, $i_2,\ldots, i_k$ şi coloanelor j_1, $j_2,\ldots, j_k$ fomează o matrice de ordinul k al cărei determinant îl vom nota prin $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ şi îl vom numi *minor de ordin k* pentru **det**(M).

Dacă eliminăm din matricea iniţială liniile i_1, $i_2,\ldots, i_k$ şi coloanele $j_1, j_2,\ldots, j_k$ obţinem o matrice pătratică de ordin n-k al cărei determinant îl vom nota prin $\overline{M}^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ şi îl vom numi *minorul complementar* al lui $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$.

Convenim de asemenea să notăm $\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_k\end{bmatrix}=\sum_{t=1}^{k}(i_t+j_t)$.

Numărul $A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}=(-1)^{\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_k\end{bmatrix}}\cdot \overline{M}^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ se va numi *complementul algebric* al lui $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$.

Observăm că pentru $k=1$ obţinem noţiunile prezentate în Definiţia 1.9..

Exemplu. Fie matricea M= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\in$M$_4$($\mathbb{Z}$).

Să alegem liniile i_1=2, i_2=4 şi coloanele j_1=1, j_2=2 (deci k=2).

Avem $M_{12}^{24} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $\overline{M}_{12}^{24} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5$, $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 9$, deci

$$A_{12}^{24} = (-1)^9 \overline{M}_{12}^{24} = -(-5) = 5 .$$

Să observăm că dacă fixăm k linii, cu elementele acestora putem forma C_n^k minori de ordin k.

Suntem acum în măsură să prezentăm *regula lui Laplace:*

Teorema 1.13. (*Laplace*). Dacă M=$(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$$\in$M$_n$(A) şi fixăm liniile 1$\le$$i_1$<$i_2$<…<$i_k$$\le$n (k$\le$n-1), atunci

$$\textbf{det(M)}= \sum_{1\le j_1<j_2<...<j_k\le n} M_{j_1 j_2 \cdots j_k}^{i_1 i_2 \cdots i_k} \cdot A_{j_1 j_2 \cdots j_k}^{i_1 i_2 \cdots i_k} \quad \textbf{(o sumă de } C_n^k \textbf{ termeni).}$$

Demonstraţie. În esenţă, ideea de demonstraţie este asemănătoare cu cea de la demonstraţia Teoremei 1.10. cu deosebirea că este ceva mai elaborată.

Observăm că pentru 1$\le$$j_1$<$j_2$<…<$j_k$$\le$n, $M_{j_1 j_2 \cdots j_k}^{i_1 i_2 \cdots i_k}$ este o sumă de k! termeni iar $A_{j_1 j_2 \cdots j_k}^{i_1 i_2 \cdots i_k}$ este o sumă de (n-k)! termeni astfel că dacă notăm cu S suma din partea dreaptă a egalităţii din enunţ atunci S va fi o sumă de k!·(n-k)!· C_n^k =n! termeni.

Dacă vom arăta că cei n! termeni ce formează pe S sunt de fapt termeni distincţi din dezvoltarea lui **det**(M) (şi cu acelaşi semn ca în **det**(M)) atunci în mod evident avem egalitatea din enunţ **det**(M)=S.

Să considerăm la început cazul i_1=j_1=1, i_2=j_2=2, …, i_k=j_k=k.

Atunci $M_{12...k}^{12...k} = \sum_{\sigma\in S_k} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{k\sigma(k)}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & ... & k \\ 1 & 2 & ... & k \end{bmatrix} = 2(1+2+...+k) = k(k+1), \text{ deci}$$

$$A_{12\ldots k}^{12\ldots k} = (-1)^{k(k+1)} \cdot \overline{M}_{12\ldots k}^{12\ldots k} = \overline{M}_{12\ldots k}^{12\ldots k} = \sum_{\tau \in S'_k} \operatorname{sgn}(\tau) a_{k+1\ \tau(k+1)} \ldots a_{n\tau(n)}$$

(unde prin S'_k am notat mulţimea permutărilor asupra elementelor k+1, k+2, …, n) astfel că

$$M_{12\ldots k}^{12\ldots k} \cdot A_{12\ldots k}^{12\ldots k} = \sum_{\substack{\sigma \in S_k \\ \tau \in S'_k}} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau) \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{k\sigma(k)} a_{k+1\ \tau(k+1)} \ldots a_{n\tau(n)} .$$

Dacă notăm $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & k+1 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(k) & \tau(k+1) & \ldots & \tau(n) \end{pmatrix} \in S_n$, atunci în mod evident sgn(ε)=sgn(σ)·sgn(τ), astfel că termenii sumei $M_{12\ldots k}^{12\ldots k} \cdot A_{12\ldots k}^{12\ldots k}$ fac parte din termenii lui **det**(M) şi apar cu acelaşi semn ca şi în dezvoltarea lui **det**(M).

Căutăm acum să probăm un rezultat similar pentru un produs general de forma $M_{j_1 j_2 \cdots j_k}^{i_1 i_2 \cdots i_k} \cdot A_{j_1 j_2 \cdots j_k}^{i_1 i_2 \cdots i_k}$. Permutând succesiv liniile şi coloanele vecine putem aduce minorul $M_{j_1 j_2 \cdots j_k}^{i_1 i_2 \cdots i_k}$ în colţul din stânga sus al determinantului **det**(M); pentru aceasta sunt necesare $(i_1-1)+$ $+(i_2-2)+\ldots+(i_k-k)+(j_1-1)+(j_2-2)+\ldots+(j_k-k)=\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_k \end{bmatrix}-k\cdot(k+1)$ permutări de linii şi coloane.

Dacă notăm prin N matricea astfel obţinută avem că **det**(N)= $(-1)^{\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_k \end{bmatrix}}$·**det**(M), $M_{j_1 j_2 \cdots j_k}^{i_1 i_2 \cdots i_k} = N_{12\ldots k}^{12\ldots k}$ iar $\overline{M}_{j_1 j_2 \cdots j_k}^{i_1 i_2 \cdots i_k} = \overline{N}_{12\ldots k}^{12\ldots k}$. Din cele demonstrate anterior, în **det**(N) suma tuturor termenilor ale căror prime k elemente intră în minorul $M_{j_1 j_2 \cdots j_k}^{i_1 i_2 \cdots i_k}$ este egală cu produsul $M_{j_1 j_2 \cdots j_k}^{i_1 i_2 \cdots i_k} \cdot \overline{M}_{j_1 j_2 \cdots j_k}^{i_1 i_2 \cdots i_k}$. De aici rezultă că suma termenilor corespunzători ai lui **det**(M) este egală cu produsul:

$$(-1)^{\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_k \end{bmatrix}} \cdot M_{j_1 j_2 \cdots j_k}^{i_1 i_2 \cdots i_k} \cdot \overline{M}_{j_1 j_2 \cdots j_k}^{i_1 i_2 \cdots i_k} = M_{j_1 j_2 \cdots j_k}^{i_1 i_2 \cdots i_k} \cdot A_{j_1 j_2 \cdots j_k}^{i_1 i_2 \cdots i_k} .$$

Cu aceasta teorema este complet demonstrată. ■

Exemplu. Fie matricea M= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z})$.

Să calculăm **det**(M) dezvoltându-l cu ajutorul regulii lui Laplace după liniile 1 şi 2. Avem

$$\mathbf{det}(M)=M_{12}^{12}A_{12}^{12}+M_{13}^{12}A_{13}^{12}+M_{14}^{12}A_{14}^{12}+M_{23}^{12}A_{23}^{12}+M_{24}^{12}A_{24}^{12}+M_{34}^{12}A_{34}^{12}=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}\cdot(-1)^{\left[\begin{smallmatrix}1&2\\1&2\end{smallmatrix}\right]}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\cdot(-1)^{\left[\begin{smallmatrix}1&2\\1&3\end{smallmatrix}\right]}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\cdot(-1)^{\left[\begin{smallmatrix}1&2\\1&4\end{smallmatrix}\right]}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 3\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\cdot(-1)^{\left[\begin{smallmatrix}1&2\\2&3\end{smallmatrix}\right]}\cdot\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}\cdot(-1)^{\left[\begin{smallmatrix}1&2\\2&4\end{smallmatrix}\right]}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\cdot(-1)^{\left[\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right]}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)\cdot(-1)^6\cdot 3+1\cdot(-1)^7\cdot 2+1\cdot(-1)^8\cdot 0+1\cdot(-1)^8\cdot 1+2\cdot(-1)^9\cdot(-6)=$$
$$=-3-2+1+12=8.$$

Corolar 1.14. Dacă M, N∈$\mathbf{M}_n$(A), atunci det(M·N)=det(M)·det(N) (adică aplicația det:$\mathbf{M}_n$(A)→A este morfism de monoizi multiplicativi).

Demonstrație. Alegem $M=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, $N=(b_{ij})_{1\le i,j\le n}$ şi considerăm matricea P∈$\mathbf{M}_{2n}$(A), $P=\begin{pmatrix}M & O_n\\ -I_n & N\end{pmatrix}$ al cărui determinant îl calculăm în două moduri:

Pe de o parte, cu ajutorul regulei lui Laplace dezvoltăm pe **det**(P) după primele n linii şi obținem **det**(P)=**det**(M)·$(-1)^{\left[\begin{smallmatrix}1&2&\dots&n\\1&2&\dots&n\end{smallmatrix}\right]}$·**det**(N)=**det**(M)·**det**(N).

Pe de altă parte, pentru fiecare 1≤j≤n în **det**(P) facem următoarele operații: înmulțim coloana 1 cu b_{1j}, pe a doua cu b_{2j}, …, pe a n-a cu b_{nj} şi ce obținem adunăm la coloana n+j, obținând astfel pentru **det**(P) următoarea formă: **det**(P)=**det**(P′), unde P′ este matricea $\begin{pmatrix}M & M\cdot N\\ -I_n & O_n\end{pmatrix}$.

Dezvoltând acum pe **det**(P) după ultimele n coloane obținem:
det(P)=**det**(M·N)·$(-1)^{\left[\begin{smallmatrix}1&2&\dots&n\\n+1&n+2&\dots&2n\end{smallmatrix}\right]}$·**det**($I_n$)=**det**(M·N)·$(-1)^{1+2+\dots+2n}\cdot(-1)^n$ = =**det**(M·N)·$(-1)^{n(2n+1)+n}$=**det**(MN), de unde deducem egalitatea **det**(M·N)=**det**(M)·**det**(N). ■

În continuare vom prezenta o formulă de calcul a produsului a două matrice (aşa zisa *formulă Binet-Cauchy*).

Fie m, $n\in\mathbb{N}^*$ a.î. $m\leq n$. Dacă $1\leq j_1<j_2<\ldots<j_m\leq n$, prin $S_m(j_1, \ldots, j_m)$ notăm mulţimea permutărilor mulţimii $\{j_1, \ldots, j_m\}$ (în particular $S_m=S_m(1, 2, \ldots, m)$).

Să considerăm acum $M\in\mathbf{M}_{m,n}(A)$ şi $N\in\mathbf{M}_{n,m}(A)$.

Cum $M\cdot N\in\mathbf{M}_m(A)$ are sens să vorbim despre **det**$(M\cdot N)$.

În continuare vom face pregătirile în vederea stabilirii unei formule de calcul pentru $\det(M\cdot N)$.

Pentru orice $k_1, \ldots, k_m\in\{1, 2, .., n\}$ (nu neapărat distincte) notăm cu $M_{\bullet, k_1, \ldots, k_m}$ (respectiv $N_{k_1, \ldots, k_m, \bullet}$) matricea de tip (m, m) având m coloane (respectiv m linii) egale în ordine cu coloanele (respectiv liniile) de indici $k_1, \ldots, k_m$ ale matricei M (respectiv N).

Să considerăm $k_1, \ldots, k_m\in\{1, 2, \ldots, n\}$ cu $k_i\neq k_j$ pentru $i\neq j$ şi fie $j_1, \ldots, j_m$ o rearanjare a elementelor $k_1, \ldots, k_m$ a.î. $j_1< j_2< \ldots <j_m$. Atunci $(k_1, \ldots, k_m)$ este o permutare din $S_m(j_1, \ldots, j_m)$ şi există o unică permutare $\sigma\in S_m$ a.î. $k_i=j_{\sigma(i)}$ $(1\leq i\leq m)$.

Definim *semnul permutării* $(k_1,\ldots,k_m)$ ca fiind $\varepsilon(k_1,\ldots, k_m)= =\mathrm{sgn}(\sigma)$.

Ţinând cont de notaţiile precedente avem:

(1) **det** $(N_{k_1, \ldots, k_m, \bullet})=\varepsilon(k_1, \ldots, k_m)\cdot$**det** $(N_{j_1, \ldots, j_m, \bullet})$ (şi o relaţie analoagă pentru **det** $(M_{\bullet, k_1, \ldots, k_m})$).

Astfel, putem scrie:

(2) **det** $(M_{\bullet, k_1, \ldots, k_m})=\sum\limits_{(k_1,\ldots,k_m)\in S_m(j_1,\ldots,j_m)}\varepsilon(k_1,\ldots,k_m)a_{1k_1}\ldots a_{mk_m}$ (şi o egalitate analoagă pentru **det** $(N_{j_1, \ldots, j_m, \bullet})$).

Cu notaţiile introduse mai sus avem:

Teorema 1.15. ***(Binet-Cauchy).*** **Fie m, $n\in\mathbb{N}^*$ a.î. $m\leq n$. Atunci pentru oricare două matrice $M\in M_{m,n}(A)$ şi $N\in M_{n,m}(A)$ are loc egalitatea:**

$$\det(M\cdot N)=\sum_{1\leq j_1<\ldots<j_m\leq n}\det(M_{\bullet, j_1, \ldots, j_m})\cdot\det(N_{j_1, \ldots, j_m, \bullet})$$

Demonstrație. Dacă notăm $P=M\cdot N=(c_{ij})_{1\le i,j\le m}\in\mathbf{M_m}(A)$ atunci $\mathbf{det}(M\cdot N)=\mathbf{det}(P)=\sum_{(i_1,\dots,i_m)\in S_m}\varepsilon(i_1,\dots,i_m)c_{1i_1}\dots c_{mi_m}=$

$$=\sum_{(i_1,\dots,i_m)\in S_m}\varepsilon(i_1,\dots,i_m)\left(\sum_{k_1=1}^{n}a_{1k_1}b_{k_1i_1}\right)\dots\left(\sum_{k_m=1}^{n}a_{mk_m}b_{k_mi_m}\right)$$

$$=\sum_{k_1,\dots,k_m\in\{1,2,\dots,n\}}a_{1k_1}\dots a_{mk_m}\left(\sum_{(i_1,\dots i_m)\in S_m}\varepsilon(i_1,\dots i_m)b_{k_1i_1}\dots b_{k_mi_m}\right)$$

$$=\sum_{\substack{k_1,\dots,k_m\in\{1,2,\dots,n\}\\ k_i\ne k_j\ pentru\ i\ne j}}a_{1k_1}\dots a_{mk_m}\cdot\mathbf{det}\,(N\ k_1,\dots,k_m,\boldsymbol{.}\,)$$

(am ținut în ordine cont de definiția unui determinant, de faptul că un determinant cu două linii identice este nul ca şi de (1) şi (2)).

Grupând termenii cu $\{k_1,\dots,k_m\}=\{j_1,\dots,j_m\}$ pentru $1\le j_1<j_2<\dots<j_m\le m$ arbitrar fixați obținem:

$$\sum_{\substack{k_1,\dots,k_m\in\{1,2,\dots,n\}\\ k_i\ne k_j\ pentru\ i\ne j}}a_{1k_1}\dots a_{mk_m}\cdot\mathbf{det}\,(N\ k_1,\dots,k_m,\boldsymbol{.}\,)=$$

$$=\sum_{1\le j_1<\dots<j_m\le n}\mathbf{det}\,(N\ j_1,\dots,j_m,\boldsymbol{.}\,)\cdot\left(\sum_{(k_1,\dots,k_m)\in S_m(j_1,\dots,j_m)}\varepsilon(k_1,\dots,k_m)a_{1k_1}\dots a_{mk_m}\right)=$$

$$=\sum_{1\le j_1<\dots<j_m\le n}\mathbf{det}\,(M\ \boldsymbol{.},j_1,\dots,j_m)\cdot\mathbf{det}\,(N\ j_1,\dots,j_m,\boldsymbol{.}\,),$$

de unde rezultă egalitatea din enunț.■

Observația 1.16. Dacă în formula Binet-Cauchy considerăm m=n, atunci obținem că dacă $M, N\in\mathbf{M_n}(A)$, atunci $\mathbf{det}(M\cdot N)=\mathbf{det}(M)\cdot\mathbf{det}(N)$, adică ceea ce obținusem şi în Corolarul 1.14..

În continuare vom prezenta şi alte aplicații ale formulei Binet-Cauchy.

Să considerăm în locul inelului A corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe.

Pentru $M\in\mathbf{M_{m,n}}(\mathbb{C})$ vom nota prin $\overline{M}$ matricea ce se obține din M înlocuind fiecare element al lui M prin conjugatul său. În mod evident ${}^t\overline{M} = \overline{{}^tM}$ şi vom nota $M^* = {}^t\overline{M} = \overline{{}^tM}$ **.** Dacă M este o matrice pătratică (adică m=n) atunci ținând cont de definiția lui **det**(M) deducem imediat că **det**($\overline{M}$)= $\overline{\det(M)}$ şi astfel

$$\mathbf{det}(M\cdot\overline{M})=\mathbf{det}(M)\cdot\mathbf{det}(\overline{M})=\det(M)\cdot\overline{\det(M)}=\left|\det(M)\right|^2\geq 0$$

(cu egalitate dacă **det**(M)=0). Analog deducem că şi **det**(${}^tM\cdot M$)≥0.

Corolar 1.17. Dacă m, n∈$\mathbb{N}^*$ şi m≤n, atunci pentru orice matrice M∈$M_{m,n}(\mathbb{C})$, det(M·M*) este un număr real iar det(M·M*)≥0 (egalitatea are loc dacă şi numai dacă pentru orice $1\leq j_1<j_2<\ldots<j_m\leq n$ avem det (M ., $j_1, \ldots, j_m$)=0).

Demonstrație. Aplicăm formula Binet-Cauchy matricelor M şi N=${}^t\overline{M}$ =M* şi obținem:

$$\mathbf{det}(M\cdot{}^t\overline{M})=\sum_{1\leq j_1<\ldots<j_m\leq n}\mathbf{det}\,(M\ .,j_1,\ldots,j_m)\cdot\mathbf{det}({}^t\overline{M}\ j_1,\ldots,j_m,.)=$$

$$=\sum_{1\leq j_1<\ldots<j_m\leq n}\mathbf{det}\,(M\ .,j_1,\ldots,j_m)\cdot\mathbf{det}\,({}^t\overline{M}\ .,j_1,\ldots,j_m)\geq 0.\ \blacksquare$$

Corolar 1.18. Dacă m, n∈$\mathbb{N}^*$ şi m≤n, atunci pentru orice matrice M∈$M_{m,n}(\mathbb{R})$ are loc inegalitatea:

$$\mathbf{det(M\cdot{}^tM)\geq 0.}$$

Mai mult, egalitatea are loc dacă şi numai dacă pentru orice $1\leq j_1< j_2<\ldots<j_m\leq n$ avem det (M ., $j_1, \ldots, j_m$)=0.

Corolar 1.19. Fie m, n∈$\mathbb{N}^*$ cu m>n. Atunci pentru orice două matrice M∈$M_{m,n}(\mathbb{C})$ şi N∈$M_{n,m}(\mathbb{C})$ are loc egalitatea det(M·N)=0.

Demonstrație. Considerăm matricele $\widetilde{M}$, $\widetilde{N}$ ∈$\mathbf{M_n}(\mathbb{C})$ care se obțin din M, respectiv N, prin adăugarea la sfîrşit a m-n>0 coloane, respectiv linii, ale căror elemente sunt toate nule. Se observă că M·N= $\widetilde{M}\cdot\widetilde{N}$ şi atunci:

$$\mathbf{det}(M\cdot N)=\mathbf{det}(\widetilde{M}\cdot\widetilde{N})=\mathbf{det}(\widetilde{M})\cdot\mathbf{det}(\widetilde{N})=0\cdot 0=0.\ \blacksquare$$

Corolar 1.20. (*Fischer*) Dacă $M\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ este o matrice pentru care există $N\in M_{n,m}(\mathbb{C})$ cu $\det(M\cdot N)\neq 0$, atunci cu necesitate $m\leq n$.

Corolar 1.21. (*Identitatea lui Lagrange*) Fie $n\geq 2$ un număr natural. Atunci pentru orice a_i, b_i, x_i, $y_i\in\mathbb{C}$ cu $1\leq i\leq n$ are loc identitatea:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}b_jy_j\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}a_iy_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}b_jx_j\right)=\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(a_ib_j-a_jb_i\right)\cdot\left(x_iy_j-x_jy_i\right).$$

În particular pentru $x_i=\overline{a_i}$ şi $y_i=\overline{b_i}$, $1\leq i\leq n$ obținem forma clasică a identității lui Lagrange:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right)-\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|^2=\sum_{1\leq i<j\leq n}\left|a_ib_j-a_jb_i\right|^2.$$

Demonstrație. Aplicăm formula lui Binet-Cauchy pentru $M=\begin{pmatrix}a_1 & \cdots & a_n\\ b_1 & \cdots & b_n\end{pmatrix}$ şi $N=\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ \vdots & \vdots\\ x_n & y_n\end{pmatrix}$. $\blacksquare$

Corolar 1.22. (*Cauchy-Bouniakovski-Schwartz*) Dacă $n\geq 2$ este un număr natural, atunci pentru orice a_i, $b_i\in\mathbb{C}$ cu $1\leq i\leq n$ avem inegalitatea:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right)$$

cu egalitate dacă şi numai dacă există $\lambda\in\mathbb{C}$ a.î. $a_i=\lambda\cdot b_i$ pentru $1\leq i\leq n$.

Demonstrație. Totul rezultă din forma clasică a identității lui Lagrange. $\blacksquare$

Corolar 1.23. Fie m, n$\in\mathbb{N}^*$ cu $2\le m\le n$. Atunci, pentru orice două matrice $M\in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $N\in M_{n,m}(\mathbb{C})$ şi orice $\lambda\in\mathbb{C}$ are loc egalitatea:

$$\lambda^{n-m}\cdot\det(M\cdot N+\lambda\cdot I_m)=\det(N\cdot M+\lambda\cdot I_n).$$

Demonstrație. Să demonstrăm la început egalitatea din enunț pentru m=n iar pentru aceasta fie polinomul

$$\det(M\cdot N++\lambda\cdot I_n)=\lambda^n+\sum_{k=1}^{n}a_k\lambda^{n-k}\in\mathbb{C}[\lambda].$$

Aplicând formula Binet-Cauchy deducem că pentru orice $1\le k\le n$ avem:

$$a_k=\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n}\det\,[(MN)\ i_1, i_2, \ldots, i_k, j_1, j_2, \ldots, j_k]$$

$$=\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n}\det\,[(M\ i_1, i_2, \ldots, i_k, \bullet)\cdot(N\ \bullet, i_1, i_2, \ldots, j_k)]$$

$$=\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n}\Big(\sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_k\le n}\det\,(M\ i_1, i_2, \ldots, i_k, j_1, j_2, \ldots, j_k)\cdot$$

$$\cdot\det\,(N\ j_1, j_2, \ldots, j_k, i_1, {}_2, \ldots, i_k)\Big).$$

Schimbând ordinea de sumare în ultima expresie deducem imediat că aceasta este simetrică în M şi N de unde deducem că efectuând un calcul similar celui de mai înainte pentru $\det(N\cdot M+\lambda\cdot I_n)$ obținem acelaşi rezultat, de unde egalitatea:

$$\det(M\cdot N+\lambda\cdot I_n)=\det(N\cdot M+\lambda\cdot I_n).$$

Dacă m<n considerăm matricele pătratice $\widetilde{M}$, $\widetilde{N}\in M_n(\mathbb{C})$ care se obțin din M, respectiv N prin adăugarea la sfîrşit a n-m linii, respectiv coloane, ale căror elemente sunt toate nule.

Conform formulei lui Laplace avem $\lambda^{n-m}\cdot\det(M\cdot N+\lambda\cdot I_m)=$ $=\det(\widetilde{M}\cdot\widetilde{N}+\lambda\cdot I_n)$ şi conform cazului m=n avem că $\det(\widetilde{M}\cdot\widetilde{N}+\lambda\cdot I_n)=\det(\widetilde{N}\cdot\widetilde{M}+\lambda\cdot I_n)$, de unde egalitatea:

$$\lambda^{n-m}\cdot\det(M\cdot N+\lambda\cdot I_m)=\det(N\cdot M+\lambda\cdot I_n).\ \blacksquare$$

Corolar 1.24. Fie m, n$\in\mathbb{N}^*$ cu $1\le m<n$. Atunci pentru orice două matrice $M\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $N\in M_{n-m,n}(\mathbb{C})$, matricea $P=\begin{pmatrix}M\\ N\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{C})$ verifică inegalitatea:

$$\mathbf{\det(P)|^2 \leq \det(M\cdot M^*)\cdot\det(N\cdot N^*).}$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă există $\lambda\in\mathbb{C}$ a.î. pentru orice $1\leq j_1<j_2<\ldots<j_m\leq n$ şi $1\leq j'_1<j'_2<\ldots<j'_{n-m}\leq n$ cu $\{j_1,\ldots,j_m\}\cup\{j'_1,\ldots,j'_{n-m}\}=\{1,2,\ldots,n\}$ avem:

$$(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}+j_1+\ldots+j_m}\cdot\det(M_{\cdot,j_1,\ldots,j_m})=\lambda\cdot\det(N_{\cdot,j'_1,\ldots,j'_{n-m}}).$$

*Demonstrație.*Conform formulei lui Laplace aplicată matricei $P=\begin{pmatrix}M\\N\end{pmatrix}$ obținem:

$$|\det(P)|=\Big|\sum_{\substack{1\leq j_1<\ldots<j_m\leq n\\1\leq j'_1<\ldots<j'_{n-m}\leq n\\ j_k\neq j'_t\ \text{pentru}\ k\neq t}}(-1)^{1+\ldots+m+j_1+\ldots+j_m}\cdot\det(M_{\cdot,j_1,\ldots,j_m})\cdot\det(N_{\cdot,j'_1,\ldots,j'_{n-m}})\Big|$$

$$\leq\Big[\Big(\sum_{1\leq j_1<\ldots<j_m\leq n}|\det(M_{\cdot,j_1,\ldots,j_m})|^2\Big)\cdot\Big(\sum_{1\leq j'_1<\ldots<j'_{n-m}\leq n}|\det(N_{\cdot,j'_1,\ldots,j'_{n-m}})|^2\Big)\Big]^{1/2}=$$

$=[\det(M\cdot M^*)\cdot\det(N\cdot N^*)]^{1/2}$, de unde deducem imediat că $|\det(P)|\leq[\det(M\cdot M^*)\cdot\det(N\cdot N^*)]^{1/2}$, care prin ridicare la pătrat în ambii membrii ne dă inegalitatea cerută.

Condiția de egalitate rezultă din Corolarul 1.22..■

Corolar 1.25. Fie m, n, m_1, $m_2\in\mathbb{N}$ a.î. $2\leq m\leq n$, m_1, $m_2\geq1$ şi $m_1+m_2=m$. Dacă $P\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ este partiționată sub forma $P=\begin{pmatrix}M\\N\end{pmatrix}$ cu şi $M\in M_{m_1,n}(\mathbb{C})$ şi $N\in M_{m_2,n}(\mathbb{C})$, atunci:

$$\mathbf{\det(P\cdot P^*)\leq\det(M\cdot M^*)\cdot\det(N\cdot N^*).}$$

Demonstrație. Dacă m=n atunci afirmația din enunț este adevărată conform Corolarului 1.24..

Dacă $\det(P\cdot P^*)=0$, atunci afirmația din enunț este adevărată conform Corolarului 1.17..

Rămîne de studiat doar cazul în care m<n şi $\det(P\cdot P^*)>0$. Există atunci un vector $V\in M_{1,n}(\mathbb{C})$ a.î. $V\cdot V^*=1$ şi $P\cdot V^*=0$. De aici deducem că

$$\det\left[\begin{pmatrix}P\\V\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}P\\V\end{pmatrix}^*\right]=\det(P\cdot P^*)>0.$$

Raționând inductiv deducem existența unei matrice $X\in \mathbf{M}_{n-m,n}(\mathbb{C})$ a.î. $X\cdot X^{*}=I_{n-m}$ şi $P\cdot X^{*}=0$. Aplicând Corolarul 1.24. matricei pătratice $\widetilde{P}=\begin{pmatrix} P \\ X \end{pmatrix}$ partiționată sub forma $\widetilde{P}=\begin{pmatrix} \widetilde{M} \\ \widetilde{N} \end{pmatrix}$ cu $\widetilde{M}=M$ şi $\widetilde{N}=\begin{pmatrix} N \\ X \end{pmatrix}$ deducem că $\mathbf{det}(P\cdot P^{*})=\mathbf{det}(\widetilde{P}\cdot\widetilde{P}^{*})\le\mathbf{det}(\widetilde{M}\cdot\widetilde{M}^{*})\cdot$ $\cdot\mathbf{det}(\widetilde{N}\cdot\widetilde{N}^{*})=\mathbf{det}(M\cdot M^{*})\cdot\mathbf{det}(N\cdot N^{*})$. ■

Corolar 1.26. Considerând maticea $P\in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ cu $2\le m\le n$ şi partiționând-o sub forma $P=\begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_m \end{pmatrix}$ cu $M_i\in \mathbf{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ pentru $1\le i\le n$ avem: $\det(P\cdot P^{*})\le\det(M_1\cdot M_1^{*})\cdot\det(M_2\cdot M_2^{*})\cdot\ldots\cdot\det(M_m\cdot M_m^{*})$.

Observația 1.27. Considerând $P=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ din Corolarul 1.26. deducem că

$$|\det(P)|^2\le\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right),$$

inegalitate ce poartă numele lui *Hadamard*.

Ținând cont de Corolarul 1.24. deducem că în inegalitatea lui Hadamard avem egalitate dacă şi numai dacă pentru oricare $1\le i,\ j\le n$ avem:

$$a_{i_1}a_{j_1}+\ldots+a_{i_n}a_{j_n}=\begin{cases} 1 & pentru\ i=j \\ 0 & pentru\ i\ne j \end{cases}$$

Observația 1.28. Chestiunile legate de formula Binet-Cauchy şi aplicațiile sale au fost redactate utilizând articolul „**Determinantul produsului a două matrice. Regula lui Laplace.**” elaborat de **Stefan Buzețeanu** şi **Constantin Niță** ce a apărut în GM (Perfecționare metodică şi metodologică în matematică şi informatică) nr 3-4 din anul 1985 şi respectiv 1 din 1987.

§2. Matrice inversabilă. Inversa unei matrice. Rangul unui sistem de vectori. Rangul unei matrice. Rangul unei aplicații liniare între spații vectoriale de dimensiuni finite.

În cadrul acestui paragraf prin A vom desemna un inel unitar şi comutativ (cu $0\neq1$). Reamintim că prin **U**(A) se notează de obicei unitățile monoidului (A, $\cdot$) (adică $\mathbf{U}(A)=\{a\in A \mid$ există $b\in A$ a.î. $ab=ba=1\}$). În mod evident (**U**(A), $\cdot$) este grup, numit *grupul unităților* lui A.

Grupul unităților inelului $\mathbf{M_n(A)}$ se notează cu $\mathbf{GL_n(A)}$ şi poartă numele de *grupul general liniar de grad n* al inelului A; în particular $\mathbf{GL_1(A)}=\mathbf{U}(A)$.

În continuare vom prezenta o caracterizare a unităților inelului $\mathbf{M_n(A)}$ cu ajutorul determinanților.

Teorema 2.1. Dacă A este un inel unitar şi comutativ, atunci $M\in M_n(A)$ este inversabilă (adică $M\in GL_n(A)$) dacă şi numai dacă $\det(M)\in U(A)$.

Demonstrație. „⇒". Dacă $M\in\mathbf{M_n(A)}$ este inversabilă, atunci există $N\in\mathbf{M_n(A)}$ a.î. $M\cdot N=I_n$. Deducem imediat că $\mathbf{det}(M)\cdot\mathbf{det}(N)=1$, adică $\mathbf{det}(M)\in U(A)$.

„⇐". Să presupunem că $d=\mathbf{det}(M)\in U(A)$. Vom nota prin M^* matricea din $\mathbf{M_n(A)}$ ce se obține din ${}^tM$ înlocuind fiecare element din ${}^tM$ prin complementul său algebric din ${}^tM$ şi să demonstrăm că $M^{-1}=d^{-1}\cdot M^*$. Pentru aceasta observăm că dacă $M^*=(a_{ij}^*)_{1\leq i,\ j\leq n}$, atunci $a_{ij}^*=(-1)^{i+j}\, d_{ji}=\Gamma_{ji}$ (vezi notațiile de la §1.).

Astfel, un element oarecare al matricei $M\cdot M^*$ va fi de forma $c_{ij}=a_{i1}\cdot a_{1j}^*+\ldots+a_{in}\cdot a_{nj}^*=a_{i1}\cdot\Gamma_{j1}+\ldots+a_{in}\cdot\Gamma_{jn}$.

Deoarece $c_{ij}=\begin{cases} d & pentru\ i=j \\ 0 & pentru\ i\neq j \end{cases}$ (vezi Teorema 1.12.) deducem că $M\cdot M^*=d\cdot I_n$ şi atunci $M\cdot(d^{-1}\cdot M^*)=I_n$. Analog deducem şi că $(d^{-1}\cdot M^*)\cdot M=I_n$, de unde concluzia că $M^{-1}=d^{-1}\cdot M^*$. ■

Observația 2.2. Matricea M^* construită mai sus poartă numele de *reciproca* lui M.

Corolar 2.3. Dacă K este un corp comutativ, atunci $M\in M_n(K)$ este inversabilă dacă şi numai dacă $\det(M)\neq 0$.

Exemplu. Fie $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\in \mathbf{M_3}(\mathbb{Z})$. Deoarece $d=\mathbf{det}(M)=1\in U(\mathbb{Z})$ deducem că M este inversabilă în $\mathbf{M_3}(\mathbb{Z})$. Pentru calculul lui M^{-1} procedăm ca în cazul demonstrației Teoremei 3.1..

Pentru aceasta calculăm ${}^tM=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ iar $M^*=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ şi astfel $M^{-1}=M^*=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Într-adevăr, $M\cdot M^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_3$ şi analog $M^*\cdot M=I_3$.

Corolar 2.4. Fie K un corp comutativ şi $M\in M_n(K)$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente :

(i) $M\in GL_n(K)$

(ii) $\det(M)\neq 0$

(iii) $ind_K\{\widetilde{c}_1^M,...,\widetilde{c}_n^M\}$

(iv) $ind_K\{l_1^M,...,l_n^M\}$**, unde prin** $\widetilde{c}_1^M,...,\widetilde{c}_n^M$ **, respectiv** $l_1^M,...,l_n^M$ **am notat transpusele coloanelor, respectiv liniile matricei M (**$\widetilde{c}_1^M,...,\widetilde{c}_n^M$ **sunt priviți ca vectori în $K^m = M_{1,m}(K)$ iar** $l_1^M,...,l_n^M$ **ca vectori în $K^n= M_{1,n}(K)$).**

În cazul în care numărul n este mai mare metoda de calcul a lui M^{-1} descrisă în demonstrația Teoremei 3.1. este inutilizabilă datorită numărului mare de calcule pe care le implică.

Pentru matricele cu coeficienți într-un corp comutativ K, lema substituției oferă o metodă eficientă de calcul a inversei acestora.

Într-adevăr, se pleacă de la tabelul :

Baza	c_1^M	c_2^M	…	c_n^M	$c_1^{I_n}$	$c_2^{I_n}$	…	$c_n^{I_n}$
e_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0
e_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0
…..	……	……	……	……	……	……	……	……
e_n	a_{n1}	a_{n2}		a_{nn}	0	0	…	1

Cu ajutorul lemei substituției înlocuim pe c_1^M, $c_2^M, \ldots, c_n^M$ prin $c_1^{I_n}$, $c_2^{I_n}$, $\ldots, c_n^{I_n}$
(lucru posibil datorită Corolarului 2.4., (iii)) obținând în final tabelul:

Baza	c_1^M	c_2^M	…	c_n^M	$c_1^{I_n}$	$c_2^{I_n}$	…	$c_n^{I_n}$
c_1^M	1	0	…	0	b_{11}	b_{12}	…	b_{1n}
c_2^M	0	1	…	0	b_{21}	b_{22}	…	b_{2n}
…..	……	……	……	……	……	……	……	……
c_n^M	0	0	…	1	b_{n1}	b_{n2}	…	b_{nn}

Matricea $N=(b_{ij})_{1\le i,j\le n}$ ce apare în al doilea „compartiment” al ultimului tabel este chiar inversa lui M deoarece pentru orice $1\le i, j\le n$ avem $c_j^{I_n} = b_{1j}c_1^M + \ldots + b_{nj}c_n^M$, lucru echivalent cu egalitatea $I_n=M\cdot N$.

Să calculăm de exemplu cu ajutorul lemei substituției inversa matricei $M=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M_2(\mathbb{R})}$ (aceasta există deoarece $\mathbf{det}(M)=3+2=5\neq 0$):

Baza	c_1^M	c_2^M	$c_1^{I_2}$	$c_2^{I_2}$
e_1	3	2	1	0
e_2	-1	1	0	1
c_1^M	1	2/3	1/3	0
e_2	0	5/3	1/3	1
c_1^M	1	0	1/5	-2/5
c_2^M	0	1	1/5	3/5

Deducem că $M^{-1}=\begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$.

Într-adevăr, $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 1/5 & 3/5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I_2$.

Observația 2.5. 1. Vectorii bazei canonice $e_1, \ldots, e_n$ din K^n nu pot fi întotdeauna înlocuiți cu $c_1^M, c_2^M, \ldots, c_n^M$ (în această ordine). În general $e_1, \ldots, e_n$ se înlocuiesc cu $c_{\sigma(1)}^M, c_{\sigma(2)}^M, \ldots, c_{\sigma(n)}^M$ unde $\sigma\in S_n$, astfel că M^{-1} apare în ultimul tabel din lema substituției „perturbată” de σ. În acest caz, M^{-1} poate fi obținută prin diferite permutări de linii care restabilesc ordinea $c_1^M, c_2^M, \ldots, c_n^M$ în baza $\{c_{\sigma(1)}^M, \ldots, c_{\sigma(n)}^M\}$.

2. Calculul lui M^{-1} cu ajutorul lemei substituției poate demara fără a ne asigura că **det**(M)≠0.

Dacă **det**(M)=0, atunci la un anumit pas al iterației din lema substituției, nu toți vectorii c_i^M, $1\leq i\leq n$ pot să înlocuiască vectorii e_i, $1\leq i\leq n$, ceea ce va avea ca efect blocarea algoritmului de calcul, de unde concluzia că **det**(M)=0, adică M^{-1} nu există.

Să considerăm acum sistemul de n ecuații cu n necunoscute cu coeficienți în corpul comutativ K:

$$[S]\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Notăm $M=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in \mathbf{M_n(K)}$, $b=(b_1, \ldots, b_n)\in K^n$ iar pentru $1\le i\le n$ fie M_i matricea ce se obține din M înlocuindu-i coloana i prin coloana termenilor liberi $\widetilde{b}={}^t b$.

În aceste condiții avem următorul rezultat:

Teorema 2.6. (*Cramer*) Dacă $d=\det(M)\neq 0$, atunci sistemul [S] admite soluția unică $x=(x_1, \ldots, x_n)$ unde $x_i=d_i\cdot d^{-1}$ cu $d_i=\det(M_i)$ pentru orice $1\le i\le n$.

Demonstrație. Scriem sistemul [S] sub forma matriceală $M\cdot\widetilde{x}=\widetilde{b}$, unde $x=(x_1, \ldots, x_n)$ iar $b=(b_1, \ldots, b_n)$. Deoarece $d=\mathbf{det}(M)\neq 0$, conform Corolarului 2.3. există M^{-1}, astfel că $\widetilde{x}=M^{-1}\cdot\widetilde{b}$.

În cadrul demonstrației Teoremei 2.1. am stabilit că

$$M^{-1}=\frac{1}{\det(M)}\cdot M^{*}=\frac{1}{d}\cdot\left(a_{ij}^{*}\right)_{1\le i,j\le n},$$

unde $a_{ij}^{*}=\Gamma_{ji}$, $1\le i, j\le n$.

Astfel:

$$\widetilde{x}=d^{-1}\cdot\left(a_{ij}^{*}\right)_{1\le i,j\le n}\quad \text{sau}$$

$$\widetilde{x}=d^{-1}\cdot\begin{pmatrix} a_{11}^{*}b_1+\ldots+a_{1n}^{*}b_n \\ a_{21}^{*}b_1+\ldots+a_{2n}^{*}b_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}^{*}b_1+\ldots+a_{nn}^{*}b_n \end{pmatrix}=d^{-1}\cdot\begin{pmatrix} \Gamma_{11}b_1+\ldots+\Gamma_{n1}b_n \\ \Gamma_{12}b_1+\ldots+\Gamma_{n2}b_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Gamma_{1n}b_1+\ldots+\Gamma_{nn}b_n \end{pmatrix}=d^{-1}\cdot\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \ldots \\ d_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d^{-1}\cdot d_1 \\ d^{-1}\cdot d_2 \\ \ldots \\ d^{-1}\cdot d_n \end{pmatrix}$$

(ținând cont de Teorema 1.12.), de unde $x_i=d^{-1}\cdot d_i$, $1\le i\le n$. ■

Observația 2.7. În condițiile Teoremei 2.6. spunem despre sistemul [S] că este *Cramerian*.

Definiția 2.8. Fie V un spațiu vectorial peste corpul K iar S={v_1, …, v_n}⊆V un sistem finit de vectori.

Prin *rangul* lui S notat rang(S), înțelegem numărul maxim de vectori din S ce sunt liniar independenți peste K.

În mod evident, **rang**(S)=$\mathbf{dim}_K$(S), unde reamintim că prin (S) am notat spațiul vectorial generat de S (vezi §1. din Capitolul 6).

Să definim acum noțiunea de *rang* al unei matrice M=$(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$∈$\mathbf{M_{m,n}(K)}$ cu K corp comutativ.

Pentru 1≤p≤m şi 1≤q≤n prin *minor de tipul (p, q)* al lui M înțelegem determinantul matricei de tipul (p, q) ce are elementele situate la intersecția a p linii şi q coloane ale lui M. Dacă p=q un minor de ordinul (p, p) al lui M se zice *minor de ordinul p al lui M* (în mod evident, matricea M are $C_m^p \cdot C_n^q$ minori de tipul (p, q) şi $C_m^p \cdot C_n^p$ minori de ordin p).

Definiția 2.9. Fie K un corp (comutativ) şi M∈$\mathbf{M_{m,n}(K)}$. Spunem despre matricea M că are *rangul* r şi scriem rang(M)=r dacă M are un minor de ordinul r nenul şi toți minorii de ordin mai mare ca r (dacă există!) egali cu zero. În mod evident, 0≤rang(M)≤min{m, n} şi în definiția lui rang(M) este suficient să cerem ca toți minorii de rang r+1 (dacă există) să fie egali cu zero.

Dacă m=n, a spune că rang(M)=n revine în mod evident la a spune că det(M)≠0.

Din definiția de mai sus deducem imediat următoarele proprietăți elementare pentru rangul unei matrice M∈$\mathbf{M_{m,n}(K)}$:

R_1) **rang**(M)=**rang**(^tM)

R_2) Dacă notăm prin M′ matricea ce se obține din M schimbând între ele două linii (sau coloane), atunci **rang**(M)=**rang**(M′)

R_3) Dacă $a\in K^*$ şi notăm prin M' matricea obținută din M prin înmulțirea tuturor elementelor unei linii (sau coloane) cu a, atunci **rang**$(M)=$**rang**(M').

Reamintim că în §.7. de la Capitolul 6 pentru un corp K şi $n\in\mathbb{N}^*$ am notat

$$K^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i\in K, 1\le i\le n\}= M_{1,n}(K).$$

Dacă avem $M=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}\in$ **M**$_{\mathbf{m,n}}$**(K)**, atunci liniile l_1^M, l_2^M,..., l_m^M ale lui M apar ca vectori ai K-spațiului vectorial K^n iar notând prin c_1^M, c_2^M,..., c_n^M coloanele lui M, atunci $\tilde{c}_j^M \overset{not}{=} {}^t c_j^M$, $1\le j\le n$ apar de asemenea ca vectori ai lui $K^m= M_{1,m}(K)$.

Teorema 2.10. (***Kronecker***) **Pentru orice matrice** $\mathbf{M}=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}\in$ **M**$_{\mathbf{m,n}}$**(K)**

$$\mathbf{rang(M)=rang}\ \{l_1^M, l_2^M, \ldots, l_m^M\}=\mathbf{rang}\{\tilde{c}_1^M, \tilde{c}_2^M, \ldots, \tilde{c}_n^M\}.$$

Demonstrație. Fie $r=$**rang**(M) (în sensul Definiției 2.9.).

Vom demonstra că şi **rang**$\{l_1^M, l_2^M, \ldots, l_m^M\}=r$ şi cum dual se demonstrează că şi **rang**$\{\tilde{c}_1^M, \tilde{c}_2^M, \ldots, \tilde{c}_n^M\}=r$, demonstrația teoremei va fi completă.

Deoarece rangul lui M nu se schimbă permutând între ele linii sau coloane, putem presupune că **det**$(M_r)\neq 0$, unde $M_r=(a_{ij})_{1\le i,j\le r}\in$ **M**$_{\mathbf{r}}$**(K)**.

A demonstra că $r=$**dim**$_K(l_1^M, l_2^M, \ldots, l_m^M)$ este echivalent cu a demonstra că $\{l_1^M, l_2^M, \ldots, l_r^M\}$ este o bază pentru $(l_1^M, l_2^M, \ldots, l_m^M)$.

Pentru probarea K-liniar independenței, fie $\alpha_1,\ldots,\alpha_r\in K$ a.î. $\alpha_1 l_1^M+\ldots+\alpha_r l_r^M=0\in K^n$.

Deducem imediat că $\alpha_1 l_1^{M_r}+\ldots+\alpha_r l_r^{M_r}=0\in K^r$ şi cum **det**$(M_r)\neq 0$, din Teorema lui Cramer (Teorema 2.6.) deducem că $\alpha_1=\ldots=\alpha_r=0$.

Pentru a demonstra că $\langle l_1^M, l_2^M, \ldots, l_r^M \rangle = \langle l_1^M, l_2^M, \ldots, l_m^M \rangle$ este suficient să demonstrăm că pentru orice $r+1 \le j \le m$, l_j^M este o combinație liniară de $l_1^M, l_2^M, \ldots, l_r^M$.

Pentru aceasta, pentru $1 \le i \le m$ şi $1 \le j \le n$, fie

$$M_{ij} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{rj} \\ \hline a_{i1} & \ldots & a_{ir} & a_{ij} \end{array}\right) \in \mathbf{M_{r+1}(K)}.$$

Dacă $i \le r$, atunci $\mathbf{det}(M_{ij})=0$ deoarece M_{ij} va avea două linii egale, iar dacă $i \ge r+1$ din nou $\mathbf{det}(M_{ij})=0$ datorită faptului că $r=\mathbf{rang}(M)$ iar M_{ij} este determinant de ordin $r+1$.

Dezvoltând pe $\mathbf{det}(M_{ij})$ după ultima linie avem: $0=\mathbf{det}(M_{ij})=a_{i1}d_1+\ldots+a_{ir}d_r+a_{ij}d$, unde d este complementul algebric al lui a_{ij} în M_{ij} iar $d_1, \ldots, d_r$ sunt complemenții algebrici respectiv ai lui $a_{i1}, \ldots, a_{ir}$ (în mod evident $d_1, \ldots, d_r$ nu depind de i).

Deoarece $d \neq 0$ deducem că $a_{ij}=\beta_1 a_{i1}+\ldots+\beta_r a_{ir}$ unde $\beta_k=-d^{-1}d_k$, $1 \le k \le r$ şi astfel $l_j^M = \beta_1 l_1^M + \ldots + \beta_r l_r^M$, adică $\langle l_1^M, l_2^M, \ldots, l_r^M \rangle = \langle l_1^M, l_2^M, \ldots, l_m^M \rangle$. ■

Corolar 2.11. Rangul unei matrice M nu se schimbă dacă la o linie (sau coloană) a sa adunăm o combinație liniară de alte linii (sau coloane).

Demonstrație. Într-adevăr, dacă notăm prin M' matricea ce se obține din M adăugând la o linie (sau coloană) a sa o combinație liniară de linii (sau coloane) atunci subspațiul vectorial generat de liniile lui M' va fi în mod evident egal cu subspațiul vectorial generat de liniile lui M. ■

Observația 2.12. Teorema 3.10. ne permite să calculăm iterativ rangul unei matrice nenule $M \in \mathbf{M_{m,n}(K)}$.

Deoarece M este nenulă, **rang**(M)≥ 1. Să presupunem că am găsit un minor de ordin r$\geq$1 nenul. Pe acesta îl bordăm cu elementele corespunzătoare ale uneia din liniile şi uneia dintre coloanele ce nu fac parte din acel minor. Dacă toți aceşti minori de ordin r+1 sunt nuli, atunci **rang**(M)=r. Dacă însă cel puțin unul este nenul, atunci continuăm procedeul cu acel minor.

Să observăm că în felul acesta numărul minorilor de ordin r+1 ce se calculează prin bordarea unui minor de ordin r este (m-r)(n-r) pe când dacă am fi calculat rangul lui M cu ajutorul Definiției 3.9. ar fi trebuit să calculăm $C_m^{r+1} \cdot C_n^{r+1}$ m minori de ordin r+1, reducând astfel anumite calcule (deoarece în general $C_m^{r+1} \cdot C_n^{r+1}$>(m-r)(n-r)).

Exemple. 1. Să determinăm rangul matricei M=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$\in$**M$_{3,4}$($\mathbb{R}$)**.

Se observă că $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, deci **rang**(M)$\geq$2. Pentru a vedea dacă **rang**(M) este 2 sau 3 este suficient să calculăm doar doi determinanți şi anume:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \quad \text{şi} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 .$$

Deducem astfel că **rang**(M)=3.

2. Dacă considerăm acum matricea M=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$\in$**M$_{3,4}$($\mathbb{R}$)**.

Se observă că $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, deci **rang**(M)$\geq$2.

Calculând acum cei doi minori ai lui M ce bordează pe $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

obținem: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ şi $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (deoarece ultima linie este suma primelor două), astfel că **rang**(M)=2.

Observația 2.13. 1. Există şi alte procedee de a determina rangul unei matrice (vezi de exemplu [13, p.190] şi [20, p.309]) cu ajutorul anumitor transformări elementare de matrice. În cadrul acestei lucrări (mai ales pentru teoria sistemelor liniare pe care o vom prezenta în continuare) vom utiliza doar procedeul recursiv de mai înainte de a determina rangul unei matrice deoarece pe lîngă faptul că acest procedeu ne oferă cît este rangul matricei M ne permite şi punerea în evidență a unui minor de ordin cît este rangul lui M care este nenul.

2. Când m şi n sunt numere mari, o metodă mai rapidă de calcul a rangului unei matrice ne este oferită de lema substituției: dacă $M \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ şi $(e_1, \ldots, e_m)$ este baza canonică a lui K^m, atunci rangul lui M coincide cu numărul vectorilor coloană $\{c_1^M, c_2^M, \ldots, c_n^M\}$ ai lui M care prin aplicarea succesivă a lemei substituției înlocuiesc vectorii din baza canonică $\{e_1, \ldots, e_m\}$.

Spre exemplificare, să stabilim cu ajutorul lemei substituției cât este rangul matricei $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,4}(\mathbb{R})$:

Baza	c_1^M	c_2^M	c_3^M	c_4^M
e_1	2	-1	0	3
e_2	1	0	-2	1
e_3	3	-1	-2	4
c_1^M	1	-1/2	0	3/2
e_2	0	1/2	-2	-1/2
e_3	0	1/2	-2	-1/2
c_1^M	1	0	2	-2
c_2^M	0	1	-4	-1
e_3	0	0	0	0

Cum în locul lui e_3 nu poate fi adus nici c_3^M şi nici c_4^M deducem că **rang**(M)=2.

Fie V şi W două K-spaţii vectoriale de dimensiuni finite iar f:V→W o aplicaţie liniară ce are în raport cu bazele fixate din V şi W matricea M.

Definiţia 2.14. Prin definiţie, rang(f)=rang(M).

Ţinând cont că dacă considerăm în V şi W alte baze matricea lui f în raport cu aceste noi baze este de forma P·M·N cu P şi N matrice pătratice inversabile (vezi Propoziţia 7.10.) iar **rang**(P·M·N)=**rang**(M) deducem că definiţia pentru rangul lui f de mai înainte este corectă.

Observaţia 2.15. Ţinând cont de cele stabilite mai înainte deducem că dacă f:V→W este o aplicaţie liniară între două spaţii vectoriale de dimensiuni finite atunci:

(i) f este momomorfism dacă şi numai dacă **rang**(f)=$\mathbf{dim}_K$V

(ii) f este epimorfism dacă şi numai dacă **rang**(f)=$\mathbf{dim}_K$W

(iii) f este izomorfism dacă şi numai dacă **rang**(f)=$\mathbf{dim}_K$V=$\mathbf{dim}_K$W.

§3. Sisteme de ecuaţii liniare cu coeficienţi într-un corp comutativ. Sisteme omogene. Vectori şi valori proprii ai unui operator liniar. Teorema Cayley–Hamilton

În cadrul acestui paragraf prin K vom desemna un corp comutativ.

Prin *sistem de m ecuaţii liniare cu n necunoscute* (m, n∈$\mathbb{N}^*$) înţelegem un sistem de forma:

$$[S]\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$, unde a_{ij}, $b_j \in K$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

A *rezolva* sistemul [S] revine la a găsi $x=(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ ce verifică [S]; un astfel de $x \in K^n$ se va numi *soluție* a lui [S].

Sistemul [S] se zice *compatibil* în K dacă are cel puțin o soluție şi *incompatibil* în caz contrar. Dacă [S] are un număr finit de soluții el se zice *compatibil determinat* iar în cazul în care are o infinitate de soluții se zice *compatibil nedeterminat*. Dacă mai avem un alt sistem [S′] de ecuații liniare cu m linii şi n necunoscute, vom spune că [S] şi [S′] sunt *echivalente* dacă au aceleaşi soluții; în acest caz vom scrie [S]~[S′].

Notând $M=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \in \mathbf{M}_{\mathbf{m,n}}(K)$, $b=(b_1, \ldots, b_m) \in K^m$ şi $x=(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, sistemul [S] admite scrierea matriceală $M \cdot \widetilde{x} = \widetilde{b}$ (unde $\widetilde{x} = {}^t x$ şi $\widetilde{b} = {}^t b$).

A rezolva sistemul [S] revine la a da răspuns (în această ordine) la următoarele probleme:

P_1: Dacă [S] este compatibil sau nu;

P_2: În caz de compatibilitate, cum se rezolvă [S].

Fie $r=\mathbf{rang}(M)$; din cele stabilite în §2. avem că $0 \le r \le \min\{m, n\}$. Există atunci un minor de ordin r al lui M nenul şi toți minorii de ordinul r+1 sunt nuli (evident, dacă există minori de ordinul r+1).

Ținând cont de proprietățile determinanților putem presupune că minorul de ordinul r nenul (pe care îl vom numi *minor principal*) este $\left|a_{ij}\right|_{1 \le i, j \le r} \ne 0$.

Necunoscutele $x_1, \ldots, x_r$ se vor numi *necunoscute principale* iar restul se vor numi *necunoscute secundare*. Ecuațiile 1, 2, …, r se vor numi *ecuații principale* iar restul *secundare*.

În cele ce urmează vom răspunde la P_1 şi P_2 în funcție de valorile pe care le poate lua r.

Cazul 1: r=m=n. În acest caz d=**det**(M)$\neq$0, sistemul [S] se zice Cramerian din cele stabilite în §2., (vezi Teorema 2.6.) deducem că sistemul [S] este compatibil determinat iar soluția este dată de x=(x_1, …, x_n) cu $x_i=d^{-1}d_i$, $1\leq i\leq n$, unde d_i este determinantul matricei ce se obține din M înlocuind coloana i prin coloana $\widetilde{b}$ a termenilor liberi, $1\leq i\leq n$.

Cazul 2: r=m<n. În acest caz toate ecuațiile sunt principale şi avem doar necunoscute secundare (şi anume pe x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n).

Răspunsul la P_1 şi P_2 este dat de:

Teorema 3.1. Dacă r=m<n atunci:

P_1: Sistemul [S] este compatibil n-r nedeterminat

P_2: Pentru rezolvarea lui [S] procedăm astfel: trecem în membrul drept termenii ce conțin necunoscutele secundare, obținând astfel un sistem Cramerian în necunoscutele principale. Alegând $x_s=\alpha_s\in K$ pentru $r+1\leq s\leq n$ vom determina cu ajutorul formulelor lui Cramer pe x_1, …, x_r în funcție de α_{r+1}, …, α_n .

Demonstrație. Într-adevăr, dacă notăm $M_r=\left(a_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq r}$, $N_{n-r}=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq m\\ r+1\leq j\leq n}}$, $x'=(x_1, \dots, x_r)\in K^r$ şi $x''=(x_{r+1}, \dots, x_n)\in K^{n-r}$, atunci sistemul [S] se scrie sub forma echivalentă:

$$[S'] \qquad M_r\cdot\widetilde{x}'+N_{n-r}\cdot\widetilde{x}''=\widetilde{b}\ .$$

Deoarece **det**(M_r)$\neq$0, există M_r^{-1} şi astfel [S′] este echivalent cu:

$$[S''] \qquad M_r\cdot\widetilde{x}'=-N_{n-r}\cdot\widetilde{x}''+\widetilde{b}$$

care este un sistem Cramerian în necunoscutele principale x_1, …, x_r. Alegând $x_s=\alpha_s\in K$ cu $r+1\leq s\leq n$ din rezolvarea lui [S″] cu ajutorul formulelor lui Cramer găsim pe x_1, …, x_r în funcție de α_{r+1}, …, α_n, astfel că soluția generală a lui [S] este dată de: $x_1=x_1(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n)$,…, $x_r=x_r(\alpha_{r+1},\dots, \alpha_n)$, $x_{r+1}=\alpha_{r+1}$,…, $x_n=\alpha_n$, cu α_{r+1}, …, α_n din K, alese arbitrar. ■

Exemplu. Să considerăm în $\mathbb{R}$ sistemul:

$$[S] \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}.$$

În acest caz m=2, n=4, $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ şi deoarece $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, deducem că **rang**(M)=2=m < n=4, astfel că x_1 şi x_2 sunt necunoscute principale iar x_3 şi x_4 secundare.

Din cele prezentate mai sus deducem că sistemul [S] este compatibil 4-2=2 -nedeterminat. Pentru rezolvarea sa să alegem $x_3=\alpha_3$, $x_4=\alpha_4$ (cu $\alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$) şi astfel sistemul [S] este echivalent cu sistemul Cramerian:

$$[S'] \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 = -3\alpha_3 + \alpha_4 + 2 \\ x_1 + x_2 = \alpha_3 - 2\alpha_4 - 1 \end{cases}.$$

Folosind formulele lui Cramer deducem imediat că $x_1 = -\frac{2}{3}\alpha_3 - \frac{1}{3}\alpha_4 + \frac{1}{3}$ şi $x_2 = \frac{5}{4}\alpha_3 - \alpha_4 - \frac{4}{3}$, astfel că soluția lui [S] este x=($-\frac{2}{3}\alpha_3 - \frac{1}{3}\alpha_4 + \frac{1}{3}$, $\frac{5}{4}\alpha_3 - \alpha_4 - \frac{4}{3}$, α_3, α_4) cu $\alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ arbitrare.

Cazul 3: r < m. În acest caz sistemul [S] are şi ecuații secundare. Pentru a răspunde la la P_1 şi P_2 să stabilim anumite notații şi definiții specifice acestui caz.

Vom nota $\overline{M} = \left(M, \widetilde{b}\right) \in$ $\mathbf{M}_{\mathbf{m,n+1}}$(K), matricea ce se obține din M adăugându-i acesteia coloana $\widetilde{b}$ a termenilor liberi. Matricea $\overline{M}$ astfel obținută poartă numele de *extinsa lui M*.

Următorul rezultat răspunde la P_1:

Teorema 3.2. (***Kronecker-Capelli***) **Sistemul [S] este compatibil dacă şi numai dacă rang(M)=rang($\overline{M}$).**

Demonstrație. Totul rezultă din scrierea lui [S] sub forma matriceală echivalentă următoare:

$$[S'] \qquad x_1 \cdot \widetilde{c}_1 + x_2 \cdot \widetilde{c}_2 + ... + x_n \cdot \widetilde{c}_n = \widetilde{b}$$

(unde $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, ..., \widetilde{c}_n$ sunt coloanele matricei M) şi privind pe $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, ..., \widetilde{c}_n$ ca vectori din K^m.

Astfel, dacă $(\alpha_1,…,\alpha_n) \in K^n$ este o soluție a lui [S] atunci $\alpha_1 \cdot \widetilde{c}_1 + \alpha_2 \cdot \widetilde{c}_2 + ... + \alpha_n \cdot \widetilde{c}_n = \widetilde{b}$ şi deci $\widetilde{b}$ este o combinație liniară de $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, ..., \widetilde{c}_n$, de unde concluzia că **rang**(M)=**rang**($\overline{M}$) (ținând cont de Teorema 2.10. şi Corolarul 2.11.).

Reciproc, dacă **rang**(M)=**rang**($\overline{M}$) înseamnă că $\widetilde{b}$ este o combinație liniară de $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, ..., \widetilde{c}_n$, adică există $\alpha_1, …, \alpha_n \in K$ a.î. $\alpha_1 \cdot \widetilde{c}_1 + \alpha_2 \cdot \widetilde{c}_2 + ... + \alpha_n \cdot \widetilde{c}_n = \widetilde{b}$ şi astfel $x=(\alpha_1, …,\alpha_n) \in K^n$ este o soluție a lui [S]. ■

Pentru fiecare $r+1 \le j \le m$ să notăm prin N_j matricea

$$N_j = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & ... & a_{1r} & b_1 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{r1} & ... & a_{rr} & b_r \\ \hline a_{j1} & ... & a_{jr} & b_j \end{array}\right)$$ iar $\Delta_j = \mathbf{det}(N_j)$.

Cei m-r determinanți Δ_j $(r+1 \le j \le m)$ poartă numele de *determinanți caracteristici*.

Astfel, Teorema 3.2. are următoarea formă echivalentă datorată lui Rouché:

Teorema 3.3. (*Rouché*) Sistemul [S] este compatibil dacă şi numai dacă toți cei m-r determinanți caracteristici Δ_j $(r+1 \le j \le m)$ sunt egali cu zero.

Pentru a răspunde la P_2 avem nevoie de următorul rezultat:

Propoziția 3.4. Dacă sistemul [S] este compatibil, atunci [S] este echivalent cu sistemul $[S_r]$ format doar din ecuațiile principale.

Demonstrație. Avem de demonstrat doar că în caz de compatibilitate a lui [S], dacă $(\alpha_1 , …, \alpha_n) \in K^n$ este o soluție a lui $[S_r]$ atunci pentru orice $r+1 \le j \le m$ avem:

$$a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + …+ a_{jn}\alpha_n = b_j .$$

Pentru aceasta plecăm de la determinantul de ordin r+1:

$$D_{r,j}(x_1,...,x_n)=\left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & ... & a_{1r} & a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n-b_1 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{r1} & ... & a_{rr} & a_{r1}x_1+...+a_{rn}x_n-b_r \\ \hline a_{j1} & ... & a_{jr} & a_{j1}x_1+...+a_{jn}x_n-b_j \end{array}\right| = \sum_{s=1}^{n}\left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & ... & a_{1r} & a_{1s} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{r1} & ... & a_{rr} & a_{rs} \\ \hline a_{j1} & ... & a_{jr} & a_{js} \end{array}\right|\cdot x_s-\Delta_j$$

(Δ_j fiind determinantul caracteristic).

Cum **rang**(M)=r deducem că

$$(\star)\ D_{r,j}(x_1,\ldots, x_n)=-\Delta_j.$$

Dacă $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\in K^n$ este o soluție a lui $[S_r]$, atunci

$$D_{r,j}(\alpha_1,...,\alpha_n)=\left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & ... & a_{1r} & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{r1} & ... & a_{rr} & 0 \\ \hline a_{j1} & ... & a_{jr} & a_{j1}\alpha_1+...+a_{jn}\alpha_n-b_j \end{array}\right| =$$

$=\mathbf{det}(M_r)(a_{j1}\alpha_1+a_{j2}\alpha_2+\ldots+a_{jn}\alpha_n-b_j)$ şi ținând cont de $(\star)$ deducem că

$$\mathbf{det}(M_r)(a_{j1}\alpha_1+a_{j2}\alpha_2+\ldots+a_{jn}\alpha_n-b_j)=-\Delta_j\ \ (\star\star).$$

Cum [S] este compatibil, deducem că $\Delta_j=0$ pentru orice $r+1\le j\le m$ (conform Teoremei 3.3.) şi astfel din $(\star\star)$ deducem că

$$a_{j1}\alpha_1+a_{j2}\alpha_2+\ldots+a_{jn}\alpha_n-b_j=0 \text{ pentru orice } r+1\le j\le m. \ \blacksquare$$

Observația 3.5. Din cele stabilite mai înainte, deducem că în cazul când **rang**(M)=r < m, pentru a răspunde la P_1 calculăm cei m-r determinanți caracteristici Δ_j ($r+1\le j\le m$). Dacă unul dintre aceştia este nenul, atunci sistemul [S] este incompatibil pe când dacă toți sunt nuli, atunci sistemul [S] este compatibil, n-r nedeterminat.

Pentru a răspunde la P_2 (în caz de compatibilitate) reținem sistemul format din ecuațiile principale şi procedăm ca în *Cazul 2*.

Exemplu. Să se decidă dacă sistemul

$$[S]\quad \begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3=-1 \\ x_1+x_2-x_3=2 \\ 3x_1-2x_2+3x_3=1 \end{cases}$$

este compatibil sau nu şi în caz afirmativ să se rezolve în $\mathbb{R}$.

Avem $M=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}\in\mathbf{M_3}(\mathbb{R})$ şi cum **det**(M)=0 iar

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=5\neq 0$ deducem că **rang**(M)=2 < 3=m astfel că suntem în

Cazul 3.

Avem un singur determinant caracteristic $\left|\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & -2 & 1 \end{array}\right|=0$ şi

atunci conform Teoremei lui Rouché sistemul [S] este compatibil 1-nedeterminat. Primele două ecuații, ca şi necunoscutele x_1, x_2 sunt principale. Pentru rezolvarea lui [S] reținem sistemul format din ecuațiile principale:

$$[S'] \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

şi procedând ca în *Cazul 2* găsim soluția ($x_1=-\frac{1}{5}\alpha+1$, $x_2=\frac{6}{5}\alpha+1$, $x_3=\alpha$) cu $\alpha\in\mathbb{R}$.

Dacă în sistemul inițial [S], $b_1=b_2=\ldots=b_m=0$, vom spune despre [S] că este *omogen*.

Propoziția 3.6. Dacă sistemul [S] este omogen, atunci mulțimea soluțiilor sale V_S este un subspațiu vectorial al lui K^n iar $\dim_K V_S=n-r$, unde $r=$rang(M).

Demonstrație. Fie α, $\beta \in K$ şi x, $y \in K^n$ a.î. $A\widetilde{x} = A\widetilde{y} = \widetilde{0}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ cu $0_n=(0, \ldots,0) \in K^n$.

Deoarece $A \cdot (\alpha \cdot \widetilde{x} + \beta \cdot \widetilde{y}) = \alpha \cdot (A \cdot \widetilde{x}) + \beta \cdot (A \cdot \widetilde{y}) = \alpha \cdot \widetilde{0}_n + \beta \cdot \widetilde{0}_n = \widetilde{0}_n$,

deducem că $\alpha \cdot \widetilde{x} + \beta \cdot \widetilde{y} \in V_S$, adică V_S este subspațiu vectorial al lui K^n.

Să considerăm acum aplicația liniară $f_M:K^n \to K^m$ ce are drept matrice față de bazele canonice din K^n şi K^m pe M. Deoarece pentru orice $x \in K^n$, $f_M(x) = M \cdot \widetilde{x}$ deducem că $V_S=Ker(f_M)$ şi astfel, ținând cont de Teorema 2.20. de la Capitolul 6 şi de Definiția 2.14. avem că $\mathbf{dim}_K V_S = \mathbf{dim}_K(K^n) - \mathbf{dim}_K Im(f_M) = n-r$. ■

Observația 3.7. Elementele unei baze a lui V_S poartă numele de *soluții de bază* pentru sistemul omogen [S].

Pentru a determina astfel de soluții procedăm astfel:

1. Reținem doar sistemul omogen format din ecuațiile principale.

2. Trecem în membrul drept termenii ce conțin necunoscutele secundare şi dăm pe rând cîte unei necunoscute secundare valoarea 1 iar la celelalte valoarea 0 obținând astfel n-r sisteme Crameriene în necunoscutele principale. Cele n-r soluții ale acestor sisteme Crameriene ne dau soluțiile de bază pentru sistemul omogen [S].

Exemplu. Să determinăm soluțiile de bază ale sistemului omogen:

$$[S] \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{(alegem } K=\mathbb{R}\text{).}$$

Avem $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ şi deducem imediat că **rang**(M)=2, alegând drept minor principal pe $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$.

Sistemul [S] va fi echivalent cu:

$$[\mathrm{S}'] \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

sau:

$$[\mathrm{S}''] \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3x_3 - x_4 \\ 2x_1 + x_2 = x_3 + 2x_4 \end{cases}.$$

Făcând $x_3=1$ şi $x_4=0$ iar apoi $x_3=0$ şi $x_4=1$ obţinem sistemele Crameriene $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ şi $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ pe care rezolvându-le obţinem soluţiile $\left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$ şi respectiv $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Soluţiile de bază ale lui [S] vor fi $v_1 = \left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}, 1, 0\right)$ şi $v_2 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0, 1\right)$ astfel că soluţia generală a lui [S] va fi de forma $x=\alpha v_1+\beta v_2$, cu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Observaţia 3.8. Din cele expuse mai sus deducem că sistemul omogen [S] de m ecuaţii cu n necunoscute are:

(i) Soluţie diferită de cea banală dacă şi numai dacă **rang**(M)<n (astfel că dacă m=n atunci sistemul omogen [S] are soluţii nebanale dacă şi numai dacă **det**(M)=0)

(ii) Numai soluția banală dacă şi numai dacă **rang**(M)=n (astfel că dacă m=n atunci sistemul omogen [S] are numai soluția banală dacă şi numai dacă **det**(M)≠0).

Observația 3.9. Sistemele liniare se pot rezolva şi cu ajutorul lemei substituției.

Vom exemplifica pe un caz particular de sistem cramerian (cititorul putând intui uşor cum se procedează în general).

Pentru aceasta să considerăm sistemul:

$$[S]\quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, deducem că sistemul [S] este Cramerian şi deci coloanele $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ formează o bază pentru $\mathbb{R}^2$ şi a rezolva pe [S] revine la a găsi coordonatele lui $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ în această bază.

Din tabelul lemei substituției:

Baza	c_1	c_2	b
e_1	2	-3	4
e_2	1	1	2
c_1	1	-3/2	2
e_2	0	5/2	0
c_1	1	0	2
c_2	0	1	0

deducem că soluția lui [S] este (2, 0).

Fie V un K-spațiu vectorial de dimensiune n iar B={e_1,…, e_n}⊂V o bază a sa. O aplicație liniară f:V→V se mai numeşte şi *operator liniar*.

Vom nota prin $M_f \in \mathbf{M_n}(K)$ matricea ataşată lui f relativă la perechea de baze (B, B) (vezi §7. de la Capitolul 6).

Definiția 3.10. Un scalar $\lambda \in K$ se zice *valoare proprie* pentru operatorul f dacă există $x \in V$, $x \neq 0$ (ce se va numi *vector propriu* pentru f corespunzător lui λ) a.î. $f(x)=\lambda x$.

Să observăm că egalitatea $f(x)=\lambda x$ din definiția de mai sus este echivalentă cu egalitatea $M_f \cdot \widetilde{x} = \lambda \cdot \widetilde{x} \Leftrightarrow \left(M_f - \lambda \cdot I_n\right) \cdot \widetilde{x} = \widetilde{0}$ (unde reamintim că pentru $x=(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{M_{1,n}}(K)=K^n$, prin $\widetilde{x}$ am notat $\widetilde{x} = {}^t x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M_{n,1}}(K)$), astfel că existența vectorului propriu x este echivalentă cu condiția ca sistemul omogen $\left(M_f - \lambda \cdot I_n\right) \cdot \widetilde{x} = \widetilde{0}$ să admită soluție nebanală, de unde cu necesitate condiția ca $\mathbf{det}\left(M_f - \lambda \cdot I_n\right) = 0$ (vezi Observația 3.8.).

Să presupunem că $P_f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n$ cu $a_1,\ldots,a_n \in K$ şi să considerăm polinomul $P_f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \in K[X]$ care se va numi *polinomul caracteristic* al lui f.

Deoarece $a_n=(-1)^n \neq 0$ deducem că polinomul caracteristic P_f este un polinom de grad n cu coeficienți în K. În aparență rădăcinile lui P_f depind de baza inițială B a lui V. Dacă mai avem în V o altă bază $B'=\{e'_1, \ldots, e'_n\} \subset V$ atunci dacă notăm prin $N \in \mathbf{M_n}(K)$ matricea de trecere de la B la B′, atunci N este inversabilă (vezi Teorema 7.2. de la Capitolul 6) iar dacă notăm prin M_f' matricea ataşată lui f relativă la noua pereche de baze (B′, B′), atunci $M_f'=N^{-1} \cdot M_f \cdot N$ (vezi Corolarul 7.11. de la Capitolul 6).

Atunci $\mathbf{det}(M_f'-\lambda \cdot I_n)=\mathbf{det}(N^{-1} \cdot M_f \cdot N-\lambda \cdot I_n)=\mathbf{det}[N^{-1} \cdot (M_f-\lambda \cdot I_n) \cdot N]=$ $=\mathbf{det}(N^{-1}) \cdot \mathbf{det}(M_f-\lambda \cdot I_n) \cdot \mathbf{det}(N) = \mathbf{det}(N^{-1}) \cdot \mathbf{det}(N) \cdot \mathbf{det}(M_f-\lambda \cdot I_n) =$ $=\det(N^{-1} \cdot N) \cdot \mathbf{det}(M_f-\lambda \cdot I_n)=\mathbf{det}(I_n) \cdot \mathbf{det}(M_f-\lambda \cdot I_n)=\mathbf{det}(M_f-\lambda \cdot I_n)$, de unde concluzia că rădăcinile lui P_f nu depind de alegerea bazei B.

Lema 3.11. Dacă pentru o valoare proprie $\lambda \in K$ notăm prin V_λ mulțimea vectorilor proprii corespunzători lui λ, atunci V_λ este un subspațiu vectorial al lui V.

Demonstrație. Fie $x, y \in V_\lambda$ şi $\alpha, \beta \in K$. Avem $f(x)=\lambda x$ şi $f(y)=\lambda y$ astfel că $f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)=\alpha(\lambda x)+\beta(\lambda y)=\lambda(\alpha x+\beta y)$, de unde concluzia că $\alpha x+\beta y \in V_\lambda$, adică V_λ este un subspațiu vectorial al lui V (ce se va numi *subspațiu propriu al lui f corespunzător valorii proprii* λ). ∎

Observația 3.12. Unui vector propriu x îi corespunde o singură valoare proprie λ.

Într-adevăr, dacă mai avem $\lambda' \in K$ a.î. $f(x)=\lambda' x$, cum $f(x)=\lambda x$, deducem că $\lambda' x=\lambda x \Leftrightarrow (\lambda'-\lambda)x=0$ şi cum $x\neq 0$ cu necesitate $\lambda'-\lambda=0$, adică $\lambda'=\lambda$.

Rezumând cele expuse mai sus, deducem că:

(i) valorile proprii ale lui f sunt rădăcinile polinomului caracteristic P_f.

(ii) vectorii proprii corespunzători unei valori proprii $\lambda \in K$ sunt soluții ale sistemului omogen $\left(M_f - \lambda \cdot I_n\right)\cdot \widetilde{x} = \widetilde{0}$.

Teorema 3.13. Vectorii proprii ai operatorului f corespunzători la valori proprii distincte două câte două sunt liniar independenți.

Demonstrație. Facem inducție matematică după numărul m al valorilor proprii distincte două câte două ($m\leq n$). Pentru m=1 teorema este evidentă.

Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ valori proprii ale lui f distincte două câte două iar $x_1, \ldots, x_m$ vectorii proprii corespunzători. Dacă prin absurd există $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$ nu toți nuli a.î. $(\star)$ $\alpha_1 x_1 +\ldots+\alpha_m x_m = 0$ deducem că $\alpha_1 f(x_1)+\ldots+\alpha_m f(x_m) = 0$ sau $(\star\star)$ $(\alpha_1\lambda_1)x_1+\ldots+(\alpha_m\lambda_m)x_m = 0$.

Să presupunem de exemplu că $\alpha_1\neq 0$.

Din $(\star)$ şi $(\star\star)$ deducem imediat că:

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_m)x_1 +\ldots+ \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1}-\lambda_m)x_m = 0.$$

Conform ipotezei de inducție deducem că:

$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m) = \ldots = \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) = 0$.

În particular $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m) = \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) = 0$ şi cum $\lambda_1 \neq \lambda_m$ deducem cu necesitate $\alpha_1 = 0$ – absurd!. ■

Corolar 3.14. Dacă operatorul liniar $f:V \to V$ are n valori proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ distincte două cîte două, atunci vectorii proprii corespunzători $x_1, \ldots, x_n$ formează o nouă bază B', astfel că matricea lui f relativă la baza B' va fi $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$**.**

Astfel, dacă alegem pentru $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ cîte un vector propriu $x_1, \ldots, x_n$ din $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_n}$ şi notăm prin N matricea pătratică de ordin n formată din coordonatele lui $x_1, \ldots, x_n$, atunci ținând cont de Corolarul 7.11. de la Capitolul 6, deducem că $N^{-1} \cdot M_f \cdot N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow M_f = N \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot N^{-1}$.

Spunem în acest caz că am *diagonalizat* pe M.

Observația 3.15. Dacă matricea ataşată operatorului $f:V \to V$ față de o bază $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ este matricea diagonală $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$, atunci $e_1, \ldots, e_n$ sunt vectori proprii iar $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ valorile proprii corespunzătoare pentru f.

Într-adevăr, dacă $\lambda\in K$ este o valoare proprie oarecare a lui f atunci notând cu x vectorul propriu corespunzător, există $\alpha_1, \ldots, \alpha_n\in K$ nu toate nule a.î. $f(x)=\lambda x$ şi $x=\alpha_1 e_1+\ldots+\alpha_n e_n$.

Atunci $f(x)=\alpha_1 f(e_1)+\ldots+\alpha_n f(e_n) \Leftrightarrow \lambda x=\alpha_1(\lambda_1 e_1)+\ldots+\alpha_n(\lambda_n e_n)$ $\Leftrightarrow \lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i\cdot e_i)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i\cdot\lambda_i)\cdot e_i$, de unde cu necesitate $\lambda\cdot\alpha_i=\lambda_i\cdot\alpha_i$ pentru orice $1\leq i\leq n$. Cum printre elementele $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ există cel puţin unul nenul (căci $x\neq 0$), deducem cu necesitate că există $1\leq i\leq n$ a.î. $\lambda=\lambda_i$.

Teorema 3.16. (*Cayley-Hamilton*) Fie $A\in M_n(K)$ iar $P_f = a_0 + +a_1X + \ldots + a_nX^n\in K[X]$ polinomul caracteristic al lui A. Atunci $a_0 I_n+ +a_1A + \ldots + a_nA^n=0_n$, unde 0_n este matricea pătratică nulă de ordin n din $M_n(K)$ (altfel zis, $P_f(A)=0_n$).

Demonstraţie. Există o infinitate de valori ale lui $\lambda\in K$ pentru care $P_f(\lambda)=\mathbf{det}(A-\lambda\cdot I_n)\neq 0$. Pentru astfel de valori ale lui λ, matricea $A-\lambda\cdot I_n$ este inversabilă iar

$$(A-\lambda\cdot I_n)^{-1}=\frac{1}{P_f(\lambda)}(A-\lambda\cdot I_n)^* \Leftrightarrow (\star)\ (A-\lambda\cdot I_n)(A-\lambda\cdot I_n)^*=P_f(\lambda)I_n.$$

Ţinând cont de felul în care se calculează $(A-\lambda\cdot I_n)^*$ deducem că $(A-\lambda\cdot I_n)^* = B_0 + B_1\lambda + \ldots + B_{n-1}\lambda^{n-1}$ cu $B_0, B_1, \ldots B_{n-1}\in \mathbf{M}_n(K)$ astfel că $(\star)$ devine

$$(A-\lambda\cdot I_n)(B_0+B_1\lambda+\ldots+B_{n-1}\lambda^{n-1})=P_f(\lambda)I_n$$

sau $(\star\star)$ $AB_0 +(AB_1 -B_0)\lambda+(AB_2 - B_1)\lambda^2 + \ldots+(AB_{n-1} - B_{n-2})\lambda^{n-1} - -B_{n-1}\lambda^n=a_0 I_n+a_1I_n\lambda+\ldots+ a_nI_n\lambda^n$.

Deoarece $(\star\star)$ este valabilă pentru o infinitate de valori ale lui λ deducem cu necesitate egalităţile:

$$AB_0 = a_0 I_n$$
$$AB_1 - B_0 = a_1 I_n$$
$$AB_2 - B_1 = a_2 I_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$AB_{n-1} - B_{n-2} = a_{n-1} I_n$$

$$- B_{n-1} = a_n I_n$$

Din aceste utime egalități deducem că:

$a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_{n-1} A^{n-1} + a_n A^n =$

$= AB_0 + A(AB_1 - B_0) + A^2(AB_2 - B_1) + \ldots + A^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) + A^n(-B_{n-1}) =$

$= AB_0 + A^2 B_1 - AB_0 + A^3 B_2 - A^2 B_1 + \ldots + A^n B_{n-1} - A^{n-1} B_{n-2} - A^n B_{n-1} = 0_n$. ■

Observația 3.17. Scriind egalitatea $a_0 I_n + a_1 A + \ldots + a_n A^n = 0_n$ din Teorema Cayley–Hamilton sub forma

$a_0 I_n = A(a_1 I_n + a_2 A \ldots + a_n A^{n-1})$, dacă $a_0 = P_f(0) = \mathbf{det}(A) \neq 0$ atunci putem trage concluzia că $A^{-1} = (a_0^{-1} a_1) I_n + (a_0^{-1} a_2) A + \ldots + (a_0^{-1} a_n) A^{n-1}$, obținând astfel o altă metodă de calcul a inversei unei matrice nesingulare din $\mathbf{M_n}(K)$.

Pentru alte chestiuni legate de operatori liniari (subspații invariante, matricea canonică Jordan a unui operator liniar, etc.) recomandăm cititorului lucrările [9], [13] şi [26].

CAPITOLUL3 : ELEMENTE DE PROGRAMARE LINIARÃ

§1. Punerea unei probleme de programare liniară. Soluții posibile. Soluții de bază.

În cadrul acestui paragraf vom considera $\mathbb{R}^n = M_{n,1}(\mathbb{R})$, adică $\mathbb{R}^n = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} | x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n\}$. Pentru $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vom nota (ca şi în Capitolul 7) $\widetilde{x} = {}^t x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Pentru $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\widetilde{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ definim $x \leq y \overset{def}{\Leftrightarrow} x_i \leq y_i$ pentru orice $1 \leq i \leq n$ şi $<x, y> \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Aplicația $<\, ,\, > : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ poartă numele de *produsul scalar canonic* pe $\mathbb{R}^n$ şi se verifică imediat că este o aplicație liniară în ambele variabile. În plus, $<x, x> \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ şi $<x, x>=0$ dacă şi numai dacă $\widetilde{x} = (0, \ldots, 0) \overset{not}{=} \mathbf{0}$. Dacă toate componentele lui x sunt pozitive vom scrie $x \geq \mathbf{0}$.

Să considerăm acum $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, de rang m, (deci $m \leq n$) $b \in \mathbb{R}^m$, $b \geq \mathbf{0}$ şi sistemul liniar de m ecuații cu n necunoscute Ax = b iar

$$P=\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \text{ şi } x \geq \mathbf{0}\}.$$

Pentru $c \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{c} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ considerăm aplicația liniară $f_c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_c(x) = <c, x> = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.

A rezolva o *problemă de programare liniară* (PPL) înseamnă a găsi $x_0 \in P$ pentru care $f_c(x_0) = \max_{x \in P} f_c(x)$ (în care caz vom scrie PPL-max) sau $f_c(x_0) = \min_{x \in P} f_c(x)$ (în care caz vom scrie PPL-min). Cum $\min(f_c) = -\max(-f_c)$ este suficient să considerăm doar PPL-max.

Funcția $f_c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se numeşte *funcție obiectiv* iar orice $x \in P$ se zice *soluție posibilă* pentru PPL-max.

O soluție $x_0 \in P$ se zice *optimă* pentru PPL-max dacă $f_c(x_0) \geq f_c(x)$, pentru orice $x \in P$, adică $f_c(x_0) = \max_{x \in P} f_c(x)$.

O soluție $x \in P$, $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ se zice *soluție de bază* dacă vectorii coloană C_j^A ai matricei A pentru care $x_j \neq 0$ sunt liniar independenți în $\mathbb{R}^m$ (în mod evident, avem cel mult C_n^m soluții de bază).

O soluție de bază x se zice *nedegenerată* dacă are m componente diferite de 0 şi *degenerată* în caz contrar.

Dacă x este o soluție de bază nedegenerată, matricea $B \in M_m(\mathbb{R})$, formată din coloanele C_j^A ale matricei A pentru care $x_j \neq 0$ se numeşte *baza* soluției de bază x (dacă $B=I_m$ baza B se zice *primal admisibilă*).

În continuare vom arăta că optimul funcției obiectiv f_c poate fi realizat de către o soluție de bază, ceea ce reduce rezolvarea unei PPL–

max la găsirea valorii maxime a unei aplicaţii liniare pe o mulţime finită.

Lema 1.1. Fie $x_1, \ldots, x_r$ un sistem de numere reale strict pozitive şi $y_1, \ldots, y_r$ un sistem de numere reale nu toate nule. Atunci există $\varepsilon > 0$ a.î. pentru orice $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ să avem $x_i - \lambda y_i > 0$, $1 \le i \le r$ şi pentru cel puţin un indice s, $1 \le s \le r$ avem $x_s - \varepsilon y_s = 0$ sau $x_s + \varepsilon y_s = 0$.

Demonstraţie. Fie $I = \{i \mid y_i > 0\}$ şi $J = \{j \mid y_j < 0\}$ (conform ipotezei $I \ne \emptyset$ sau $J \ne \emptyset$). Să presupunem că $I \ne \emptyset$ şi $J \ne \emptyset$ şi fie $p \in I$, $q \in J$ a.î. $\frac{x_p}{y_p} = \inf_{i \in I}\left\{\frac{x_i}{y_i}\right\}$ şi $\frac{x_q}{y_q} = \sup_{j \in J}\left\{\frac{x_j}{y_j}\right\}$. Atunci $0 < \frac{x_p}{y_p} \overset{not}{=} \alpha$ şi $0 > \frac{x_q}{y_q} \overset{not}{=} \beta$ iar dacă alegem $\varepsilon = \min\{\alpha, -\beta\}$, atunci se verifică imediat că pentru orice $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $x_i - \lambda y_i > 0$, $1 \le i \le r$.

Când $\varepsilon = \alpha$ considerând $s = p$ avem $x_s - \varepsilon y_s = 0$ iar când $\varepsilon = -\beta$ considerând $s = q$ avem $x_s - \varepsilon y_s = 0$. Când $I \ne \emptyset$ şi $J = \emptyset$ luăm $\beta = -\infty$ iar când $I = \emptyset$ şi $J \ne \emptyset$ luăm $\alpha = +\infty$. ■

Propoziţia 1.2. Dacă $P \ne \emptyset$, atunci P are cel puţin o soluţie de bază.

Demonstraţie. Dacă $\mathbf{0} \in P$, totul este clar (deoarece se admite tacit că **0** este o soluţie de bază.

Fie acum $x \in P$ cu un număr minim r de componente nenule. Schimbând eventual indexarea, putem presupune că $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$ cu $x_i > 0$ pentru orice $1 \le i \le r$.

Vrem să demonstrăm că x este soluţie de bază.

Dacă prin absurd coloanele $C_1^A, \ldots, C_r^A$ ale matricei A sunt liniar dependente în $\mathbb{R}^m$, atunci există $y_1, \ldots, y_r \in \mathbb{R}$ nu toţi nuli a.î. $y_1 C_1^A + \ldots + y_r C_r^A = \mathbf{0}$.

Dacă alegem $y \in \mathbb{R}^n$ a.î. $\tilde{y} = (y_1, \ldots, y_r, 0, \ldots, 0)$, atunci ultima egalitate se scrie matriceal sub forma $Ay = \mathbf{0}$, de unde deducem că $A(x + \lambda y) = Ax + \lambda Ay = Ax = b$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$. Conform Lemei 1.1. există $\varepsilon > 0$ a.î. $x + \lambda y \ge 0$ pentru orice $\lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Pentru indicele s ales ca în Lema 1.1. deducem că putem alege λ' în $[-\varepsilon, \varepsilon]$ a.î. vectorul $x'=x+\lambda' y$ are cel mult r-1 componente nenule, ceea ce este absurd ținând cont de alegerea lui x. Prin urmare C_1^A, …, C_r^A sunt vectori liniar independenți în $\mathbb{R}^m$, de unde concluzia că x este soluție de bază. ■

Propoziția 1.3. Dacă în P există o soluție optimă, atunci în P găsim o soluție optimă de bază.

Demonstrație. Fie x o soluție optimă pentru PPL-max cu un număr r minim de componente diferite de zero. Dacă r = 0, atunci x = **0**, care este o soluție de bază.

Să presupunem că r > 0. Vom demonstra că x este soluție de bază.

Dacă x nu este soluție de bază, atunci există $y\in\mathbb{R}^n$ a.î. $\widetilde{y} = (y_1, …, y_r, 0, …, 0)$ cu cel puțin o componentă nenulă a.î. Ay = **0** şi să avem $x+\lambda y\geq 0$ pentru orice $\lambda\in[-\varepsilon, \varepsilon]$ (cu ε ales ca în Lema 1.1.) Dacă $f_c(y)\neq 0$, alegem $\lambda_0\in[-\varepsilon, \varepsilon]$ a.î. $\lambda_0 f_c(y) > 0$, şi atunci $f_c(x+\lambda_0 y)=$ $=f_c(x)+ \lambda_0 f_c(y) > f_c(x)$ şi cum $x+\lambda_0 y\in P$ contrazicem alegerea lui x. Deci $f_c(y) = 0$ şi alegem $\lambda'\in[-\varepsilon, \varepsilon]$ a.î. $x' = x+\lambda y\in P$ şi să aibă cel mult r-1 componente nenule.

Avem: $f_c(x') = f_c(x+\lambda y) = f_c(x) + \lambda f_c(y) = f_c(x)$, deci x' este o soluție optimă cu cel mult r-1 componente nenule – absurd! (ținând cont de alegerea lui x). Deci x este soluție optimă de bază. ■

§2. Tabelul simplex asociat unei soluții de bază. Algoritmul simplex. Regula lexicografică de evitare a ciclajului.

Conform celor stabilite la §1., pentru a determina maximul funcției obiectiv ne putem limita la soluțiile de bază (ce sunt în număr finit).

Algoritmul simplex (elaborat de *Dantzing* în 1947) este cea mai importantă metodă cunoscută pentru identificarea printre soluțiile de bază a aceleia pentru care funcția obiectiv f_c îşi atinge maximul. Pentru a „demara” algoritmul simplex este necesar să găsim o soluție de bază pentru PPL (vom prezenta mai târziu anumite metode pentru determinarea unei soluții de bază).

Din cele stabilite mai înainte putem presupune că o PPL-max se poate pune sub aşa zisa *formă standard*:

Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,m+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2,m+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{m,m+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ (cu $m \le n$),

$b \in \mathbb{R}^m$, $b \ge \mathbf{0}$, $\tilde{b} = (b_1, \dots, b_m)$ şi $c \in \mathbb{R}^n$ a.î. $\tilde{c} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Se cere să se decidă dacă există sau nu $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a.î. $x_0 \ge \mathbf{0}$, $Ax_0 = b$ şi pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$, $x \ge \mathbf{0}$ cu $Ax = b$ să avem $f_c(x) \le f_c(x_0)$.

Facem următorul tabel (numit *tabel simplex*):

c		λ_1	λ_2	…	λ_m	λ_{m+1}	…	λ_n	
	Baza	C_1^A	C_2^A	…	C_m^A	C_{m+1}^A	…	C_n^A	b
λ_1	C_1^A	1	0	…	0	$a_{1,m+1}$	…	a_{1n}	b_1
λ_2	C_2^A	0	1	…	0	$a_{2,m+1}$	…	a_{2n}	b_2
.	.	.	.	…	.	.	…	.	.
.	.	.	.	…	.	.	…	.	.
.	.	.	.	…	.	.	…	.	.
λ_m	C_m^A	0	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	a_{mn}	b_m
	z	$z_1=\lambda_1$	$z_2=\lambda_2$	…	$z_m=\lambda_m$	z_{m+1}	…	z_m	$f_c(x_0)$
	Δ	0	0	…	0	$z_{m+1}-\lambda_{m+1}$	…	$z_m-\lambda_m$	

în care:

- C_1^A, …, C_n^A sunt coloanele matricei A (dintre care C_1^A, …, C_m^A sunt coloanele matricei unitate I_m şi formează aşa zisa *bază unitară*).

- $\widetilde{z} = (z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_n)$, unde $z_i=\lambda_i$ pentru $1\le i\le m$ şi $z_j = \sum_{t=1}^{m} \lambda_t a_{tj}$ pentru $m+1\le j\le n$
- $\widetilde{\Delta} = (0, \ldots, 0, \Delta_{m+1}, \ldots, \Delta_n)$, unde $\Delta_j=z_j-\lambda_j$ pentru $m+1\le j\le n$.

Întrega discuție a rezolvării unui PPL-max „gravitează" în jurul semnelor diferențelor Δ_j ($1\le j\le n$, mai precis pentru $m+1\le j\le n$).

Avem următoarele posibilități:

Cazul 1: *Toate diferențele $\Delta_j\ge 0$ ($1\le j\le n$)*

În această situație avem următorul rezultat:

Teorema 2.1. Dacă $\Delta_j\ge 0$ pentru orice $1\le j\le n$, atunci $x_0\in\mathbb{R}^n$ pentru care $\widetilde{x}_0 = (b_1, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0)$ este o soluție de optim pentru PPL-max.

Demonstrație. În mod evident $x_0\ge\mathbf{0}$ este o soluție de bază. Va trebui să demonstrăm că dacă $x\in\mathbb{R}^n$, $x\ge\mathbf{0}$ şi $Ax = b$, atunci $f_c(x)\le f_c(x_0)$.

Dacă $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)\ge\mathbf{0}$, atunci:

$$(S)\begin{cases} x_1 + \ldots + a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Ținând cont de (S) avem:

$$f_c(x_0)-f_c(x)=\lambda_1b_1+\ldots+\lambda_mb_m-(\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_mx_m+ \lambda_{m+1}x_{m+1}+\ldots+\lambda_nx_n) =$$
$$= \lambda_1b_1+\ldots+\lambda_mb_m-\lambda_1x_1-\ldots-\lambda_mx_m-(\lambda_{m+1}x_{m+1}+\ldots+\lambda_nx_n) =$$
$$=\lambda_1b_1+\ldots+\lambda_mb_m-\lambda_1(b_1-a_{1,m+1}x_{m+1}-\ldots-a_{1n}x_n)-\ldots-\lambda_m(b_m-a_{m,m+1}x_{m+1}-\ldots-$$
$$-a_{mn}x_n)-(\lambda_{m+1}x_{m+1}+\ldots+\lambda_nx_n)=(\lambda_1b_1+\ldots+\lambda_mb_m)-(\lambda_1b_1+\ldots+\lambda_mb_m)+ (\lambda_1a_{1,m+1}+$$
$$+\ldots+\lambda_ma_{m,m+1})x_{m+1}+\ldots+(\lambda_1a_{1n}+\ldots+\lambda_ma_{mn})x_n-(\lambda_{m+1}x_{m+1}+\ldots+\lambda_nx_n)=$$
$$=z_{m+1}x_{m+1}+\ldots+z_nx_n-(\lambda_{m+1}x_{m+1}+\ldots+\lambda_nx_n)=$$
$$=(z_{m+1}-\lambda_{m+1})x_{m+1}+\ldots+(z_n-\lambda_n)x_n=\Delta_{m+1}x_{m+1}+\ldots+\Delta_nx_n\ge 0,$$

adică $f_c(x)\le f_c(x_0)$. ■

Observația 2.2. Teorema 2.1. este cunoscută sub numele de *teorema de optim finit*.

Cazul 2. *Există $m+1\le j\le n$ a.î. $\Delta_j<0$ şi toate elementele de pe coloana C_j^A sunt negative (adică $a_{ij}\le 0$ pentru orice $1\le i\le m$).*

În acest caz vom demonstra:

Teorema 2.3. Pentru orice $\lambda \geq 0$ există $x_\lambda \in \mathbb{R}^n$, $x_\lambda \geq 0$ soluție posibilă a PPL-max a.î. $\lim\limits_{\lambda \to \infty} f_c(x_\lambda) = \infty$.

Demonstrație. Să alegem $x_\lambda \in \mathbb{R}^n$ a.î.

$\widetilde{x}_\lambda = (b_1-\lambda a_{1j}, b_2-\lambda a_{2j}, \ldots, b_m-\lambda a_{mj}, 0, \ldots, 0, \lambda, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$

(λ fiind pe poziția j). În mod evident $x_\lambda \geq \mathbf{0}$ şi $Ax_\lambda=b$.

Avem:
$$\begin{aligned} f_c(x_\lambda) &= \lambda_1(b_1-\lambda a_{1j})+\ldots+\lambda_m(b_m-\lambda a_{mj})+\lambda_j\lambda \\ &= \lambda_1 b_1+\ldots+\lambda_m b_m-\lambda(\lambda_1 a_{1j}+\ldots+\lambda_m a_{mj})+\lambda\lambda_j \\ &= \lambda_1 b_1+\ldots+\lambda_m b_m-\lambda z_j+\lambda\lambda_j \\ &= \lambda_1 b_1+\ldots+\lambda_m b_m+(-\Delta_j)\lambda \end{aligned}$$

şi cum $\Delta_j<0$, în mod evident $\lim\limits_{\lambda \to \infty} f_c(x_\lambda) = \infty$. ■

Observația 2.4. Teorema 2.3. este cunoscută sub numele de *teorema de optim infinit.*

Cazul 3. *Există $m+1 \leq j \leq n$ a.î. $\Delta_j<0$ iar pe coloana C_j^A există şi elemente strict pozitive.*

În acest caz vom demonstra următorul rezultat:

Teorema 2.5. Dacă există j cu $m+1 \leq j \leq n$ a.î. $\Delta_j<0$ şi pe coloana C_j^A există elemente strict pozitive, atunci alegem un indice i a.î. $1 \leq i \leq m$ pentru care $\frac{b_i}{a_{ij}} = \inf\left\{ \frac{b_k}{a_{kj}} \middle| a_{kj} > 0 \right\}$.

Înlocuind în baza (unitară) B = $\{C_1^A, \ldots, C_m^A\}$ pe C_i^A cu C_j^A se obține o bază $B_{ij} = \{C_1^A, \ldots, C_{i-1}^A, C_j^A, C_{i+1}^A, \ldots, C_m^A\}$ căreia îi corespunde o soluție de bază $x^* \in \mathbb{R}^n$ care „ameliorează" valoarea funcției obiectiv f_c (adică $f_c(x_0) \leq f_c(x^*)$).

Demonstrație. Refacem tabloul simplex inițial în care punem în evidență şi coloana C_j^A precum şi liniile de indice i şi k:

c		λ_1	…	λ_m	λ_{m+1}	…	λ_j	…	λ_n	
	Baza	C_1^A	…	C_m^A	C_{m+1}^A	…	C_j^A	…	C_n^A	b
λ_1	C_1^A	1	…	0	$a_{1,m+1}$	…	a_{1j}	…	a_{1n}	b_1
λ_2	C_2^A	0	…	0	$a_{2,m+1}$	…	a_{2j}	…	a_{2n}	b_2
.	.	.	…	.	.	…	.	…	.	.
λ_i	C_i^A	.	…	.	$a_{i,m+1}$	…	a_{ij}	…	a_{in}	b_i
.	.	.	…	.	.	…	.	…	.	.
λ_k	C_k^A	.	…	.	$a_{k,m+1}$	…	a_{kj}	…	a_{kn}	b_k
.	.	.		.	.		.	…	.	.
λ_m	C_m^A	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	a_{mj}	…	a_{mn}	b_m
	z	$z_1=\lambda_1$	…	$z_m=\lambda_m$	z_{m+1}	…	z_j	…	z_n	$f_c(x_0)$
	Δ	0	…	0	$z_{m+1}-\lambda_{m+1}$	…	$z_j-\lambda_j^*$	…	$z_n-\lambda_n$	

Cu ajutorul Lemei substituției (vezi Lema 7.4. de la Capitolul 6) vom înlocui pe C_i^A cu C_j^A obținând astfel noua bază $B_{ij}=\{C_1^A, \ldots, C_{i-1}^A, C_j^A, C_{i+1}^A, \ldots, C_m^A\}$ (pivotul fiind elementul a_{ij} pe care îl vom încercui iar printr-un asterix * vom indica diferența Δ_j luată în considerație).

Coordonatele lui b în noua bază vor fi $\widetilde{b_{ij}}=(b_1', \ldots, b'_{i-1}, b_i', b'_{i+1}, \ldots, b'_m)$, unde $b_i'=\frac{b_i}{a_{ij}}$ iar $b_k'=b_k-\frac{b_i}{a_{ij}}\cdot a_{kj}$ pentru $k\neq i$, $1\leq k\leq m$.

Se deduce imediat că $b_{ij}\geq\mathbf{0}$ ($b_i\geq 0$ în mod evident: dacă $a_{kj}=0$ atunci $b_k'=b_k\geq 0$; dacă $a_{kj}<0$ atunci scriind $b_k'=b_k+\frac{b_i}{a_{ij}}(-a_{kj})$ de asemenea $b_k'\geq 0$ iar dacă $a_{kj}>0$ atunci scriind $b_k'=a_{kj}(\frac{b_k}{a_{kj}}-\frac{b_i}{a_{ij}})$ de asemenea $b_k'\geq 0$ după felul în care am ales pe i).

Să demonstrăm că dacă alegem $x^*\in\mathbb{R}^n$ a.î. $\widetilde{x}^*=(b_1', \ldots, b'_{i-1}, 0, b'_{i+1}, \ldots, b_m', 0, \ldots, b_i', 0, \ldots, 0)$ (b_i' fiind pe poziția j), atunci $f_c(x_0)\leq f_c(x^*)$.

Într-adevăr, avem:

$f_c(x^*)=\lambda_1 b_1'+\ldots+\lambda_{i-1}b'_{i-1}+\lambda_{i+1}b'_{i+1}+\ldots+\lambda_m b'_m+\lambda_j b_i'=$

$=\lambda_1(b_1-\frac{b_i}{a_{ij}}\cdot a_{1j})+\ldots+\lambda_{i-1}(b_{i-1}-\frac{b_i}{a_{ij}}\cdot a_{i-1,j})+\lambda_{i+1}(b_{i+1}-\frac{b_i}{a_{ij}}\cdot a_{i+1,j})+$

$+\lambda_m\ (b_m-\frac{b_i}{a_{ij}}\cdot a_{mj})+\ \lambda_j(\frac{b_i}{a_{ij}})\ =\ (\lambda_1 b_1+\ \ldots+\lambda_{i-1}b_{i-1}+\lambda_{i+1}b_{i+1}+\ldots+\lambda_m\ b_m)-$

$-\frac{b_i}{a_{ij}}(\lambda_1 a_{1j}+\ \ldots+\lambda_{i-1}a_{i-1,j}+\lambda_{i+1}a_{i+1,j}+\ldots+\lambda_m a_{mj})+\lambda_j\frac{b_i}{a_{ij}}=\ f_c(x_0)-\ \lambda_i b_i-\frac{b_i}{a_{ij}}(z_j\ -$

$-\lambda_i a_{ij})+\lambda_j\frac{b_i}{a_{ij}}=f_c(x_0)-\lambda_i b_i-\frac{b_i}{a_{ij}}z_j+\lambda_i a_{ij}+\lambda_j\frac{b_i}{a_{ij}}=f_c(x_0)+\frac{b_i}{a_{ij}}(\lambda_j-z_j)=$

$=f_c(x_0)+\frac{b_i}{a_{ij}}(-\Delta_j)$, de unde concluzia că $f_c(x_0)\leq f_c(x^*)$ (căci $-\Delta_j>0$ iar $b_i\geq 0$). ■

Observația 2.6. Teorema 2.5. este cunoscută sub numele de *teorema de îmbunătățire a PPL –max şi se observă că dacă x_0 este nedegenerată atunci $b_i>0$ pentru orice $1\leq i\leq m$ şi astfel $f_c(x_0)<f_c(x^*)$.*

Observația 2.7. 1. În cazul teoremei de îmbunătățire a PPL-max am văzut că valoarea funcției obiectiv se schimbă la o iterație după regula:

$$f_c(x^*)=f_c(x_0)+\frac{b_i}{a_{ij}}(-\Delta_j).$$

În cazul în care există mai mulți j cu proprietatea că $\Delta_j<0$ iar pe coloana C_j^A avem elemente strict pozitive, există mai multe posibilități de alegere a lui j. În practică se foloseşte criteriul de „*intrare în bază*” alegând acel j pentru care $|\Delta_j|$ este maxim (căci atunci diferența $f_c(x^*)-f_c(x_0)$ este maximă).

2. Dacă $\inf\left\{\frac{b_k}{a_{kj}}\middle| a_{kj}>0\right\}$ de la Teorema 2.5. se realizează pentru *mai mulți indici i*, atunci x^* este soluție de bază degenerată, pe când dacă toate soluțiile de bază (deci şi x_0) sunt nedegenerate, atunci i este unic. Dacă x_0 este degenerat, atunci putem avea $b_i=0$ şi astfel prin trecerea de la baza B la baza B_{ij} valoarea funcției obiectiv rămâne neschimbată ($f_c(x^*)=f_c(x)$).

Acest fapt poate produce fenomenul de *ciclare* în algoritmul simplex: revenirea la o bază deja examinată şi se intră astfel într-un „cerc vicios" care nu mai face posibilă găsirea soluției optime de bază.

Există anumite metode de evitare a acestui fenomen rar întâlnit în exemple (vezi [13], [25] şi [33]).

În acest sens, vom prezenta în continuare aşa zisa *regulă lexicografică* ([33]) de evitatre a ciclajului.

Notăm $I_1=\{i \mid 1\le i\le m$ şi $\frac{b_i}{a_{ij}}=\inf\{\frac{b_k}{a_{kj}} \mid 1\le k\le m,\ a_{kj}>0\}\}$. Dacă I_1 conține un singur element, $I_1 = \{i\}$, atunci din baza $B=\{C_1^A, \dots, C_m^A\}$ iese vectorul C_i^A şi intră vectorul C_j^A (ca în cazul Teoremei 2.5.).

Dacă I_1 are mai multe elemente, notăm

$$I_2=\{p\in I_1 \mid \frac{a_{p1}}{a_{pk}}=\inf\{\frac{a_{i1}}{a_{ik}} \mid i\in I_1\}\}.$$

Dacă I_2 conține un singur element $I_2 = \{p\}$ atunci din baza inițială iese C_p^A vectorul şi intră C_j^A.

Dacă I_2 conține mai multe elemente considerăm

$$I_3=\{q\in I_2 \mid \frac{a_{q2}}{a_{qr}}=\inf\{\frac{a_{p2}}{a_{pk}} \mid p\in I_2\}\},\ \text{ş.a.m.d.}$$

Continuând în acest fel, în cel mult m+1 paşi se obține o mulțime ce are un singur element.

În finalul §3. vom prezenta un exemplu concret de evitare a ciclajului.

§3. Metode de determinare a soluțiilor de bază. Metoda matriceală. Metoda celor două faze. Exemple de aplicare a algoritmului simplex. Exemple de probleme de programare liniară. Exemplu de evitare a ciclajului.

Vom prezenta la început o *metodă matriceală* de determinare a soluțiilor de bază a unei PPL-max (de fapt a sistemului ataşat).

Exemplu. [25, p.166]. Să se determine soluțiile de bază ale

următoarei PPL-max: $\begin{cases} \bullet \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = 4 \end{cases} \\ \bullet\ \widetilde{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \geq 0 \\ \bullet\ f_c(x) = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \end{cases}$.

Matricea A este $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ şi se observă imediat că rangul (A) = 2. Dacă notăm prin A_{ij} ($i<j$, $1 \leq i,j \leq 5$) toate matricele pătratice de ordin 2 cu coloanele lui A, atunci:

- $A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_{14} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{15} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
- $A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A_{24} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A_{25} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
- $A_{34} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_{35} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
- $A_{45} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Cum toate matricele A_{ij} sunt nesingulare vom avea 10 baze pe care le vom nota cu B_{ij}, $1 \leq i < j \leq 10$, $i \neq j$.

Fixându-ne una din baze, fixăm celelalte variabile ca fiind nule iar pentru celelalte vom rezolva sisteme de forma Cx = b = $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ cu soluția $x = C^{-1}b$.

Deci $x^{B_{12}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$x^{B_{13}} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow x^2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^3 = x^{B_{14}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^4 = x^{B_{15}} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/7 \\ 6/7 \end{pmatrix} \Rightarrow x^4 = \begin{pmatrix} 10/7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6/7 \end{pmatrix}$$

$$x^5 = x^{B_{23}} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^6 = x^{B_{24}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x^6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^7 = x^{B_{25}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x^7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^8 = x^{B_{34}} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x^8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^9 = x^{B_{35}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow x^9 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x^{10} = x^{B_{45}} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow x^{10} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Deducem că numai şapte din cele 10 soluţii sunt de bază (şi anume x^1, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^9), celelalte trei având componente negative (şi anume x^2, x^8 şi x^{10}). Din cele şapte soluţii de bază trei sunt nedegenerate: x^3, x^4 şi x^9 iar celelalte patru sunt degenerate: x^1, x^5, x^6, x^7.

Observăm că x^1, x^3, x^6 şi x^7 coincid ca formă, diferenţa dintre ele constând în poziţia diferită pe care o ocupă zeroul care indică perechea cu care componenta nenulă formează baza (coloanele corespunzătoare din matricea A), coincidenţa ca formă a soluţiilor datorându-se degenerării.

Cele m componente pozitive (chiar şi cele nule) care corespund vectorilor bazei se numesc *componente bazice*, celelalte numindu-se *componente nebazice*.

În cazul general (fără a micşora generalitatea problemei) să presupunem că primele componente ale unei soluţii sunt bazice, fapt care implică liniar independenţa primelor m coloane ale matricei A care poate fi partiţionată prin urmare în două matrice de dimensiuni mai mici şi anume

$$A=\left(\begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & a_{1,m+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & a_{2,m+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & a_{m,m+1} & \dots & a_{mn} \end{array}\right)$$

notând cu B matricea pătratică m×m formată cu primele m coloane presupuse liniar independente şi cu R matricea de dimensiune m×(n-m) formată cu restul coloanelor, deci A=(B, R).

Dacă vom partiționa vectorul soluție sub forma $x'=(x^B, x^R)$, astfel că x^B cuprinde primele m componente ale lui x (adică pe cele care corespund coloanelor matricei B), iar x^R cuprinde celelalte n-m componente ale lui x, atunci restricțiile din PPL-max pot fi retranscrise ca fiind: $Bx^B+Rx^R=0$, $x^B\geq 0$, $x^R\geq 0$. Procedând în mod analog şi cu vectorul c, $c=(c^B, c^R)$, unde c^B cuprinde coeficienții variabilelor de bază din funcția obiectiv, iar c^R coeficienții celorlalte variabile, atunci problema de programare liniară PPL-max poate fi retranscrisă sub forma

$$\text{PPL-max:}\begin{cases} Bx^B+Rx^R=b \\ x^B\geq 0,\quad x^R\geq 0 \\ Max[f=c^Bx^B+c^Rx^R] \end{cases}.$$

Deoarece pentru soluția de bază avem $x^R=\mathbf{0}$, rezultă că $Bx^B=b$, de unde rezultă imediat că $x^B=B^{-1}b$, relație în virtutea căreia am rezolvat exemplul de mai sus.

Este evident că având m ecuații cu n necunoscute (m<n) avem un număr de C_n^m matrice pătratice ce pot fi formate cu cele n coloane ale matricei A. Ca urmare, rezultă că putem avea cel mult C_n^m soluții de bază.

În continuare vom prezenta câteva exemple (vezi [33]) de rezolvări prin metoda simplex a unei PPL-max. Pentru problema de programare liniară de tipul PPL-min se ține cont de faptul că $\min(f_c)=-\max(-f_c)$ şi deci în tabelul simplex vom înlocui pe $c_1, \dots, c_n$ prin $-c_1, \dots, -c_n$.

Exemplul 1: Să se rezolve următoarea:

$$\text{PPL-max: } \begin{cases} \bullet \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 2 \end{cases} \\ \bullet\ \tilde{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \geq 0 \\ \bullet\ \max[2x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4] \end{cases}.$$

Să observăm că PPL-max de mai sus este sub formă standard. (în sensul că avem bază primal admisibilă iar $\tilde{x}_0$ =(1, 2, 0, 0) este o soluție de bază.)

Avem următorul tabel simplex:

c		2	-3	1	-3	
	Baza	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	b
2	C_1^A	1	0	1	-1	1
-3	C_2^A	0	1	-1	-1	2
	z	2	-3	5	1	-4
	Δ	0	0	4	4	

Cum $\Delta \geq 0$, conform Teoremei 2.1. deducem că funcția obiectiv $f_c(x) = 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4$ de mai sus are optim finit egal cu –4 pentru $\tilde{x}_0$ =(1, 2, 0, 0).

Exemplul 2: Să se rezolve următoarea:

$$\text{PPL-max: } \begin{cases} \bullet \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 \leq 5 \\ 2x_1 - 3x_3 + 5x_4 \leq 3 \end{cases} \\ \bullet\ \tilde{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \geq 0 \\ \bullet\ \max[2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4] \end{cases}.$$

Se observă că PPL-max de mai sus nu este pusă sub formă standard. Pentru a o aduce la forma standard introducem aşa zisele *variabile fictive* (sau *ecart*) x_5, $x_6 \geq 0$, scriind PPL-max sub forma standard:

$$\text{PPL-max: } \begin{cases} \bullet \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ 2x_1 - 3x_3 + 5x_4 + x_6 = 3 \end{cases} \\ \bullet\ \widetilde{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \geq 0 \\ \bullet\ \max[2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6] \end{cases}.$$

Facem acum tabelul simplex (observând că baza primal admisibilă este $\{C_2^A, C_5^A, C_6^A\}$).

c		2	1	5	-1	0	0	
	Baza	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	C_5^A	C_6^A	b
1	C_2^A	-1	1	-2	2	0	0	2
0	C_5^A	3	0	-1	1	1	0	5
0	C_6^A	2	0	-3	5	0	1	3
	z	-1	1	-2	2	0	0	2
	Δ	-3	0	-7*	3	0	0	

Observăm că Δ_3=-7<0 şi toate elementele coloanei C_3^A sunt negative. Conform Teoremei 2.3. PPL-max de mai sus nu are optim finit.

Exemplul 3: Să se rezolve următoarea:

$$\text{PPL-max: } \begin{cases} \bullet \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 15 \\ 2x_1 + x_3 + 5x_3 \leq 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \end{cases} \\ \bullet\ \widetilde{x} = (x_1, x_2, x_3) \geq 0 \\ \bullet\ \max[2x_1 + x_2 + 3x_3] \end{cases}.$$

Aducem PPL-max la forma standard prin introducerea variabilelor fictive: x_4, x_5, $x_6 \geq 0$, obținând forma standard:

$$\text{PPL-max: } \begin{cases} \bullet \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 15 \\ 2x_1 + x_3 + 5x_3 + x_5 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 5 \end{cases} \\ \bullet\ \widetilde{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \geq 0 \\ \bullet\ \max[2x_1 + x_2 + 3x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6] \end{cases} .$$

Observvăm că B={ C_4^A , C_5^A, C_6^A } este bază primal admisibilă corespunzătoare soluției de bază $\widetilde{x}_0$=(0, 0, 0, 15, 20, 5).

Facem acum tabelul simplex:

c		2	1	3	0	0	0	
	Baza	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	C_5^A	C_6^A	b
0	C_4^A	1	2	3	1	0	0	15
0	C_5^A	2	1	5	0	1	0	20
0	C_6^A	1	2	1	0	0	1	5
	z	0	0	0	0	0	0	0
	Δ	-2	-1	-3 *	0	0	0	
0	C_4^A	-1/5	7/5	0	1	-3/5	0	3
3	C_3^A	2/5	1/5	1	0	1/5	0	4
0	C_6^A	3/5	9/5	0	0	-1/5	1	1
	z	6/5	3/5	3	0	3/5	0	12
	Δ	-4/5 *	-2/5	0	0	3/5	0	
0	C_4^A	0	2	0	1	-2/3	1/3	10/3
3	C_3^A	0	-1	1	0	1/3	-2/3	10/3
2	C_1^A	1	3	0	0	-1/3	5/3	5/3

z	2	3	3	0	1/3	4/3	40/3
Δ	0	2	0	0	1/3	4/3	

După o primă iterație am aplicat Teorema 2.5. constatând că şi la a doua iterație trebuie să aplicăm aceeaşi teoremă. Obținem în final că soluția optimă (degenerată) este $\widetilde{x}_0$=(5/3, 0, 10/3, 10/3, 0, 0) iar maximul funcției obiectiv este egal cu 40/3. Pentru alte aplicații recomandăm cititorului lucrările [25] şi [33].

Vom prezenta acum (după lucrarea [13, p.212]) *metoda celor două faze* pentru determinarea unei soluții de bază .

$$\text{Considerăm PPL-min:}\begin{cases}\bullet \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ 1\le i\le m\\ \bullet\ x_j \ge 0,\ 1\le j\le n\\ \bullet \min[f_c(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j]\end{cases}.$$

Pentru o PPL-max se procedează analog ținându-se cont de faptul că max(f_c)=-min(-f_c). Înmulțind la nevoie cu –1 ecuațiile pentru care $b_i<0$, putem presupune că $b_i\ge 0$, $1\le i\le m$. Prin introducerea *variabilelor artificiale* $x_1^a, x_2^a, ..., x_m^a$ se consideră programul liniar:

$$\text{PPL}^a\text{-min:}\begin{cases}\bullet \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_i^a = b_i,\ 1\le i\le m\\ \bullet\ x_j \ge 0,\ \ x_i^a\ge 0,\ 1\le j\le n,\ 1\le i\le m.\\ \bullet \min[f_c(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i^a]\end{cases}$$

Se observă că prin completarea cu m zerouri a unei soluții de bază pentru PPL-min se obține o soluție de bază optimă pentru PPL^a-min, cu valoarea funcției obiectiv egal cu 0. Reciproc, dacă PPL^a-min are o soluție de bază optimă, cu valoarea funcției obiectiv 0, atunci componentele corespunzătoare variabilelor artificiale ale unei asemenea soluții sunt 0 şi suprimându-le se obține o soluție de bază pentru PPL-min. Totodată rezultă că PPL-min are soluție dacă şi numai dacă PPL^a-min are soluție optimă cu valoarea funcției obiectiv egală cu zero.

Cum matricea programului PPL^a-min este $A^a=(A, I)$, unde I este matricea unitate de ordin m şi cum $b_i \geq 0$, $1 \leq i \leq m$, atunci $x^a \in \mathbb{R}^{n+m}$, $\tilde{x}^a = (0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_m)$ este o soluție de bază pentru PPL^a-min, corespunzătoare bazei I. Prin metoda simplex se poate acum căuta o soluție optimă de bază pentru PPL^a-min. Dacă valoarea funcției obiectiv pentru această soluție este 0, atunci PPL-min are soluții şi prin procedeul indicat mai sus se poate obține una dintre soluțiile sale de bază. Se aplică apoi algoritmul simplex pentru PPL-min pornind de la soluția sa de bază determinată ca mai sus.

Procedeul expus mai este cunoscut sub numele de *metoda celor două faze*, în prima fază găsindu-se, prin metoda *bazei artificiale* o soluție de bază ([13, p.213]).

Aplicație: Se consideră următoarea:

$$\text{PPL-min}: \begin{cases} \bullet \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_5 = 6 \end{cases} \\ \bullet\ x_j \geq 0,\ 1 \leq j \leq 5 \\ \bullet\ \min[3x_1 + 5x_2] \end{cases}.$$

Atunci, folosindu-se metoda celor două faze considerăm:

$$\text{PPL}^a\text{-min}: \begin{cases} \bullet \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_1^a = 9 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_2^a = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_5 + x_3^a = 6 \end{cases} \\ \bullet\ x_j \geq 0,\ \ x_i^a \geq 0,\ 1 \leq j \leq 5,\ 1 \leq i \leq 3 \\ \bullet\ \min(x_1^a + x_2^a + x_3^a) \end{cases}.$$

Matricea pentru PPL^a-min este

$$A^a = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\mathrm{A}, \mathrm{I})$$

unde A este matricea lui PPL-min şi I matricea unitate de ordin 3.

O bază pentru PPL^a-min se poate constitui cu ultimele trei coloane ale matricei A^a. Tabelul simplex corespunzător şi transformatele sale din cadrul algoritmului simplex vor fi date de următorul tabel simplex:

c		0	0	0	0	0	1	1	1	
	Baza	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	C_5^A	C_6^A	C_7^A	C_8^A	b
1	C_6^A	1	3	-1	0	0	1	0	0	9
1	C_7^A	1	1	0	-1	0	0	1	0	5
1	C_8^A	2	1	0	0	-1	0	0	1	6
	z	4	5 *	-1	-1	-1	1	1	1	20
	Δ	4	5	-1	-1	-1	0	0	0	
0	C_2^A	1/3	1	-1/3	0	0	1/3	0	0	3
1	C_7^A	2/3	0	1/3	-1	0	-1/3	1	0	2
1	C_8^A	5/3	0	1/3	0	-1	-1/3	0	1	3
	z	7/3	0	2/3	-1	-1	-2/3	1	1	5
	Δ	7/3*	0	2/3	-1	-1	-5/3	0	0	
0	C_2^A	0	1	-2/5	0	1/5	2/5	0	-1/5	2/5
1	C_7^A	0	0	1/5	-1	2/5	-1/5	1	-2/5	4/5
0	C_1^A	1	0	1/5	0	-3/5	-1/5	0	3/5	9/5
	z	0	0	1/5	-1	2/5	-1/5	1	-2/5	4/5
	Δ	0	0	1/5*	-1	2/5	-6/5	0	-7/5	
0	C_2^A	0	1	0	-2	1	0	2	-1	4
0	C_3^A	0	0	1	-5	2	-1	5	-2	4
0	C_1^A	1	0	0	1	-1	0	-1	1	1
	z	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Δ	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	
0	C_1^A	1	0	0	1	-1	0	-1	1	1
0	C_2^A	0	1	0	-2	1	0	2	-1	4

0	C_3^A	0	0	1	-5	2	-1	5	-2	4
	z	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Δ	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	

(la ultimul tabel am restabilit ordinea naturală pentru vectorii bazei).

Am ținut cont că în cazul unui PPL-min rezultatele date de Teoremele 2.1. şi 2.3. pentru PPL-max se dualizează ținând cont că min $[f_c]=-\max[-f_c]$.

Din ultimul tabel simplex rezultă că $x^* \in \mathbb{R}^5$, $\tilde{x}^*=(1, 4, 4, 0, 0)$ este soluție de bază pentru PPL-min, corespunzător bazei B formată cu primele trei coloane ale matricei A. Să observăm că B^{-1} apare în ultimele trei coloane ale tabelului simplex de mai sus.

Se constituie acum un tabel simplex T(B), (adică corespunzător bazei B), care în bună parte se poate extrage din tabelul de mai sus, şi apoi se aplică algoritmul simplex pentru PPL-min. În cazul de față, după prima iterație se obține:

c		3	5	0	0	0	
	Baza	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	C_5^A	b
3	C_1^A	1	0	0	1	-1	1
5	C_2^A	0	1	0	-2	1	4
0	C_3^A	0	0	1	-5	2	4
	z	3	5	0	-7	2	23
	Δ	0	0	0	-7	2*	
3	C_1^A	1	0	1/2	-3/2	0	3
5	C_2^A	0	1	-1/2	1/2	0	2
0	C_5^A	0	0	1/2	-5/2	1	2
	z	3	5	-1	-2	0	19
	Δ	0	0	-1	-2	0	

Din ultimul tabel rezultă că $x^* \in \mathbb{R}^5$, $\tilde{x}^*=(3, 2, 0, 0, 2)$ este soluție de bază optimă pentru PPL-min, valoarea optimă a funcției fiind $f_c(x^*) = \langle c, x^* \rangle = 3 \cdot 3+5 \cdot 2+0 \cdot 0+0 \cdot 0+0 \cdot 2 = 19$.

Exemple de probleme de programare liniară (vezi [13, p.215]).

a) Problema dietei (a amestecului). Să presupunem că pentru o anumită colectivitate trebuie întocmit un meniu pentru o anumită perioadă de timp. Fie $P_1, \ldots, P_n$ alimentele care există pentru elaborarea acestui meniu. Atunci un sistem de numere $x_1, \ldots, x_n$ unde x_j este o cantitate din alimentul P_j, j=1, …, n se va numi o *dietă*. O astfel de dietă trebuie să satisfacă anumite cerințe privind alimentarea indivizilor din colectivitate, adică trebuie să conțină anumite substanțe nutritive $S_1, \ldots, S_m$ (cum sunt de exemplu glucide, lipide minerale, vitamine, etc). Fie a_{ij}, i=1, …, m, j=1, …, n cantitatea din S_i care se află în unitatea de produs P_j . Atunci o dietă $(x_1, \ldots, x_n)$ trebuie să satisfacă condițiile:

$$(1)\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i,\ \text{i=1, …, n}$$

în care (2) $x_i \geq 0$.

Dintre toate dietele posibile se pune problema să alegem pe cea mai ieftină. Fie c_j, j=1, …, n costul unei unități de măsură din produsul P_j, atunci costul dietei $(x_1, \ldots, x_n)$ va fi:

$$(3)\ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

şi deci întocmirea unei diete cât mai ieftine care să satisfacă cerințele de hrană ale colectivității revine la găsirea unui program optim pentru programul liniar definit de ansamblul de condiții (1), (2) şi (3).

Probleme cu o formulare asemănătoare apar în industria petrochimică la obținerea unor tipuri de produse cu anumite proprietăți prin amestecul unor produse care posedă proprietățile cerute.

b) Probleme de transport. Să presupunem că din nişte puncte $P_1, \ldots, P_m$ unde există cantitățile $b_1, \ldots, b_m$ dintr-un material trebuie transportat în punctele $Q_1, \ldots, Q_n$ şi în Q_j trebuie să ajungă cel puțin cantitatea b_j' . Printr-un program de transport a acestui material se înțelege sistemul $\{x_{ij}\}$, i=1, …, m , j=1, …, n prin care x_{ij} desemnează cantitatea care se transportă de la P_i la Q_j. Un astfel de program trebuie să satisfacă, conform celor cerute, condițiile:

$$(4)\ \sum_{j=1}^{n} x_j \leq b_i\ ,$$

$$(5)\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b'_j .$$

Dacă există un program de transport (care deci verifică (4), (5)) atunci rezultă $\sum_{i=1}^{m} b_i \geq \sum_{j=1}^{n} b'_j$. Fie c_{ij} costul transportului unei unități din P_i în Q_j . Atunci costul întregului material va fi (6) $\sum_{i,j=1}^{m,n} c_{ij} x_{ij}$, şi deci pentru realizarea unui cost de transport cât mai mic trebuie să găsim matricea (x_{ij}), i=1, …, m, j=1, …, n astfel încât suma (6) să fie minimă. Relațiile (4) şi (5) pot fi cerute şi ca egalități.

În acest caz avem: (7) $\sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{j=1}^{n} b'_j$.

Reciproc, dacă este îndeplinită egalitatea (7) atunci inegalitățile (4) şi (5) sunt egalități.

c) Probleme de producție. Într-un mod destul de simplu activitatea de producție a unei întreprinderi într-o perioadă de timp dată, în care intervin produsele P_1, …, P_m poate fi caracterizată printr-un sistem de numere reale a_1, …, a_m , în care a_i să fie cantitatea din produsul P_i care se produce în această întreprindere dacă $a_i > 0$ şi - a_i cantitatea care se consumă din produsul P_i dacă $a_i<0$. Dacă $a_i=0$ se poate presupune că produsul respectiv nu intervine în activitatea întreprinderii.

Să presupunem acum că există mai multe întreprinderi G_1, …, G_n în care intervin produsele P_1, …, P_m. Fie a_{ij} cantitatea din produsul P_i care se produce (dacă $a_{ij}>0$) sau se consumă în cantitatea $-a_{ij}$ (dacă $a_{ij}<0$) în unitatea de timp. Se cere să se alcătuiască un plan de producție astfel încât să satisfacă condiția b_1, …, b_m privind produsele P_1, …, P_m , b_i i=1, …, m fiind numere reale; dacă $b_i >0$ produsul P_i corespunzător trebuie să se producă cel puțin în cantitatea b_i iar dacă $b_i <0$ produsul trebuie să se consume cel mult în cantitatea- b_i . Dacă notăm cu x_1, …, x_n timpul de funcționare respectiv al întreprinderii G_1, …, G_n atunci un plan de producție trebuie să satisfacă condițiile: (10) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$, i=1, …, m, $x_i \geq 0$.

Dacă se notează cu c_j beneficiul obținut prin funcționarea întreprinderii G_j în unitatea de timp atunci beneficiul obținut prin realizarea planului considerat va fi: (11) $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ şi deci pentru obținerea beneficiului maxim va trebui să aflăm numerele $x_1, \ldots, x_n$ care satisfac condițiile (10) şi realizează maximul funcției (11). Analog, dacă se notează cu c_j' costul funcționării întreprinderii G_j în unitatea de timp, atunci (12) $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ va fi costul realizării planului. Dacă cerem ca acest plan să se realizeze cu cheltuieli minime atunci suntem conduşi la rezolvarea problemei de programare liniară cu restricțiile (10) şi care minimizează funcția (12). Exemplele date arată că în practică problemele de programare liniară nu apar în general sub forma standard. Pentru aducerea lor la o formă standard se procedează astfel: dacă în restricții există o inegalitate de tipul $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$ se înlocuieşte cu $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i = b_i$, $y_i \ge 0$. Dacă există o inegalitate de tipul $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i$ atunci ea se înlocuieşte cu $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_{1i} - y_{2i} = b_i$, $y_{1i}, y_{2i} \ge 0$. În ambele cazuri funcția obiectiv nu se schimbă.

Dacă printre restricții nu apare o inegalitate de tipul $x_j \ge 0$, atunci se înlocuieşte $y_j' - y_j''$ în restricții şi funcția obiectiv şi se introduc în plus restricțiile $y_j' \ge 0$, $y_j'' \ge 0$.

Să exemplificăm în finalul acestui paragraf *evitarea pericolului de ciclare* în algoritmul simplex prin următorul exemplu de

$$\text{PPL-max:}\ \begin{cases} \bullet \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = 6 \\ -2x_1 + 3x_3 + x_6 = 2 \end{cases} \\ \bullet\ \widetilde{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \geq 0 . \\ \bullet\ \max[-x_5 - x_6] \end{cases}$$

Avem următorul tabel simplex:

c		0	0	0	0	-1	1	
	Baza	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	C_5^A	C_6^A	b
0	C_4^A	3	-2	1	1	0	0	4
-1	C_5^A	1	1	-3	0	1	0	6
-1	C_6^A	-2	3	1	0	0	1	2
	z	1	-4	2	0	-1	-1	-8
	Δ	1	-4 *	2	0	0	0	
0	C_4^A	5/3	0	5/3	1	0	2/3	16/3
-1	C_5^A	5/3	0	-10/3	0	1	-1/3	16/3
0	C_2^A	-2/3	1	1/3	0	0	1/3	2/3
	z	-5/3	0	10/3	0	-1	1/3	-16/3
	Δ	-5/3*	0	10/3	0	0	4/3	
0	C_4^A	0	0	5	1	-1	1	0
1	C_1^A	1	0	-2	0	3/5	-1/5	16/5
0	C_2^A	0	1	-1	0	2/5	1/5	14/5
	z	0	0	0	0	0	0	0
	Δ	0	0	0	0	1	1	

După prima iterație se observă că $\inf\left\{\frac{16/3}{5/3}, \frac{16/3}{5/3}\right\} = \frac{16}{5}$ şi astfel acest infim se obține pentru doi indici, adică $I_1=\{4, 5\}$ (în această numerotare C_4^A este primul vector!). Pentru a vedea în locul cui intră C_1^A calculăm $\min\left\{\frac{a_{i4}}{a_{i1}} \middle| i = 4{,}5\right\} = \min\left\{\frac{a_{44}}{a_{41}}, \frac{a_{54}}{a_{51}}\right\} = \min\left\{\frac{1}{5/3}, \frac{0}{5/3}\right\} = 0 = \frac{a_{54}}{a_{51}}$, deci $I_2=\{5\}$ astfel că pentru a doua iterație C_5^A iese din bază (în locul său venind C_1^A).

În final deducem că soluția optimă (degenerată) este $\tilde{x}$ =(16/5, 14/5, 0, 0, 0, 0) iar $\max(f_c)=0$.

CAPITOLUL 4: FORME BILINIARE ŞI PĂTRATICE

§1.Forme biliniare. Definiții. Exemple. Matricea ataşată unei forme biliniare. Rangul unei forme biliniare.

În cadrul acestui capitol prin V vom desemna un spațiu vectorial real de dimensiune n ($n\geq 1$) iar prin $B=\{e_1, \ldots, e_n\}\subseteq V$ o bază a sa.

Definiția 1.1. Numim *formă biliniară* pe V o aplicație $b:V\times V\to\mathbb{R}$, liniară în ambele argumente, adică $b(\alpha x+\beta y, z)= = \alpha b(x, z) + \beta b(y, z)$ şi $b(z, \alpha x+\beta y) = \alpha b(z, x) + \beta b(z, y)$ pentru orice $x, y, z\in V$ şi $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$.

De exemplu, $\mathbf{b}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to\mathbb{R}$, $b(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, \ldots, y_n)$ este o formă biliniară pe $\mathbb{R}^n$ ($n\geq 1$).

În general, dacă $\mathbf{b}:V\times V\to\mathbb{R}$ este o formă biliniară, atunci $\mathbf{b}(0, x)=\mathbf{b}(x, 0)=0$, $\mathbf{b}(-x, y)=\mathbf{b}(x, -y)=-\mathbf{b}(x, y)$, pentru orice $x, y\in V$.

Definiția 1.2. Vom spune despre forma biliniară $b:V\times V\to\mathbb{R}$ că este *simetrică* (*antisimetrică*) pe V dacă $b(y, x)=b(x, y)$ (respectiv $b(y, x)=-b(x, y)$) pentru orice $x, y\in V$.

Se verifică imediat că $\mathbf{b}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to\mathbb{R}$, $b(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ este simetrică pe $\mathbb{R}^n$ ($n\geq 1$) pe când $\mathbf{b}:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $\mathbf{b}(x, y)=x_1y_2-x_2y_1$ este antisimetrică pe $\mathbb{R}^2$ ($x=(x_1, y_1)$, $y=(x_2, y_2)$).

De asemenea, dacă pentru $n\in\mathbb{N}$ notăm

$$\mathbb{R}_n[X]=\{P\in\mathbb{R}[X] \mid \text{grad}(P)\leq n\},$$

atunci $\mathbf{b}:\mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}$, $\mathbf{b}(P, Q)=\int_0^1 \widetilde{P}(x)\widetilde{Q}(x)dx$ este o formă biliniară simetrică pe $\mathbb{R}_n[X]$.

Deoarece $B=\{e_1, \ldots, e_n\}\subseteq V$ este o bază, atunci pentru orice $x, y\in V$ avem $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$, $y=\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i$ (cu α_i, $\beta_i\in\mathbb{R}$), astfel că $b(x,y)=b\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i, \sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i\right)=\sum_{1\leq i,j\leq n}\alpha_i\beta_j b(e_i, e_j)$.

Definiția 1.3. Matricea pătratică din $M_n(\mathbb{R})$ formată din elementele $a_{ij}=b(e_i, e_j)$, $1\leq i, j\leq n$ o vom nota prin $M_{b,B}$ şi o vom numi *matricea lui b în raport cu baza B*.

Astfel, dacă $x_B=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $y_B=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$, atunci $b(x,y)=\widetilde{x}_B M_{b,B} y_B$, egalitate ce poartă numele de *expresia analitică a formei biliniare **b** în raport cu baza B* (reamintim că $\widetilde{x}_B={}^t x_B=(x_1, \ldots, x_n)$).

Propoziția 1.4. O formă biliniară $b:V\times V\to\mathbb{R}$ este simetrică (antisimetrică) pe V dacă şi numai dacă matricea $M_{b,B}$ ataşată lui b în raport cu baza B este simetrică (antisimetrică).

Demonstrație. „$\Rightarrow$ ". Dacă **b** este simetrică (antisimetrică) atunci $\mathbf{b}(e_i, e_j)=\mathbf{b}(e_j, e_i)$ (respectiv $\mathbf{b}(e_i, e_j)=-\mathbf{b}(e_j, e_i)$) adică $a_{ij}=a_{ji}$ (respectiv $a_{ij}=-a_{ji}$) pentru orice $1\leq i, j\leq n$, de unde concluzia că $M_{b,B}$ este simetrică (antisimetrică).

„$\Leftarrow$ ". Să presupunem acum de exemplu că $M_{b,B}$ este simetrică (adică ${}^tM_{b,B}=M_{b,B}$) şi să arătăm că **b** este simetrică. Conform expresiei analitice a lui **b** în raport cu baza B avem $b(x,y)=\widetilde{x}_B M_{b,B} y_B$, de unde deducem că :

$b(x,y)={}^t b(x,y)={}^t(\widetilde{x}_B \cdot M_{b,B} \cdot y_B)={}^t y_B \cdot {}^t M_{b,B} \cdot {}^t\widetilde{x}_B = \widetilde{y}_B \cdot M_{b,B} \cdot x_B = b(y,x)$, adică **b** este simetrică. Analog se demonstrează că dacă matricea $M_{b,B}$ este antisimetrică, atunci şi forma **b** este antisimetrică. ■

Să presupunem acum că în spaţiul vectorial V de dimensiune n ($n \geq 1$) mai avem o bază $B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ şi să notăm prin C matricea de trecere de la B la B′ (adică C = M(B, B′)). Dacă $C = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, atunci $e'_i = c_{1i}e_1 + \ldots + c_{ni}e_n$ pentru orice $1 \leq i \leq n$, astfel că pentru orice $1 \leq i,j \leq n$ avem:

$$b(e'_i, e'_j) = b\left(\sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k, \sum_{t=1}^{n} c_{tj} e_t\right) = \sum_{1 \leq k,t \leq n} c_{ki} c_{tj} b(e_k, e_t) = \sum_{1 \leq k,t \leq n} {}^t c_{ik} b(e_k, e_t) c_{tj},$$

de unde concluzia că $M_{b,B'} = {}^t C \cdot M_{b,B} \cdot C$, formulă ce ne arată felul în care se schimbă matricea ataşată lui **b** la schimbarea bazelor.

Din această ultimă formulă deducem imediat:

Corolar 1.5. **rang $M_{b,B'}$ = rang $M_{b,B}$.**

Acest corolar ne permite să dăm:

Definiţia 1.6. Se numeşte *rang* al unei forme biliniare b, rangul matricei $M_{b,B}$ a lui b în raport cu o bază particulară B a lui V.

§2.Forme pătratice.Polara unei forme pătratice. Matricea ataşată unei forme pătratice.Forma canonică a unei forme pătratice;metodele Gauss-Lagrange şi Jacobi.Legea inerţiei a lui Sylvester

Fie $b: V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară simetrică pe V.

Definiţia 2.1. Prin *formă pătratică* indusă de b înţelegem aplicaţia $f_b: V \to \mathbb{R}$, $f_b(x) = b(x, x)$ pentru orice $x \in V$.

De exemplu, dacă $b: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $b(x, y) = 3x_1y_1 - 2x_2y_2 + 3x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 - 3x_2y_3 - 3x_3y_2$, atunci, notând cu $B = \{e_1, e_2, e_3\}$

baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ deducem că $M_{b,B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, care fiind simetrică ne conduce la concluzia că şi **b** este simetrică.

Atunci $f_b : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f_b(x) = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ este forma pătratică indusă de **b**.

Să observăm că în general dacă **b**:$V \times V \to \mathbb{R}$ este formă biliniară simetrică, atunci
$f_b(x+y, x+y) = b(x+y, x+y) = b(x, x) + 2b(x, y) + b(y, y) = f_b(x) + f_b(y) + 2b(x,y)$,
de unde $b(x,y) = \frac{1}{2}\left[f_b(x+y) - f_b(x) - f_b(y)\right]$ ceea ce ne conduce la concluzia că forma biliniară **b** este unic determinată de forma pătratică f_b.

Definiția 2.2. Forma biliniară b ce induce forma pătratică f_b poartă numele de *polara* lui f_b.

Observația 2.3. Să presupunem că **b**:$V \times V \to \mathbb{R}$ este o aplicație biliniară oarecare şi fie $f_b : V \to \mathbb{R}$, $f_b(x) = b(x, x)$. Considerând $\mathbf{b}_1 : V \times V \to \mathbb{R}$, $b_1(x,y) = \frac{1}{2}\left[b(x,y) + b(y,x)\right]$ atunci în mod evident $\mathbf{b}_1$ este formă biliniară simetrică şi cum

$$b_1(x,x) = \frac{1}{2}\left[b(x,x) + b(x,x)\right] = b(x,x) = f_b(x)$$

tragem concluzia că $f_b(x) = f_{b_1}(x)$, adică f_b este tot o formă pătratică având însă ca polară pe $\mathbf{b}_1$.

Definiția 2.4. Fie b:$V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară simetrică şi $B \subseteq V$ o bază finită a lui V. Prin *matricea ataşată formei pătratice* f_b înțelegem matricea $M_{b,B}$ ataşată polarei b în raport cu baza B.

De exemplu, dacă f:$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, este forma pătratică $f(x) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 3x_1x_3 + x_2x_3$, atunci matricea ataşată lui f în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ este $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3/2 \\ -2 & -3 & 1/2 \\ -3/2 & 1/2 & 3 \end{pmatrix}$.

Reamintim că dacă x∈V, atunci prin x_B am notat matricea coloană formată din coordonatele lui x în baza B iar prin $\widetilde{x}_B = {}^t x_B$.

Astfel, dacă $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$, atunci $x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ şi $\widetilde{x}_B = {}^t x_B = (x_1, \ldots, x_n)$. Dacă nu este pericol de confuzie în ceea ce priveşte pe B vom scrie $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ şi $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Astfel, pentru orice x∈V avem : $f_b(x) = \widetilde{x}_B M_{b,B} x_B = \widetilde{x} M_{b,B} x$.

În cele ce urmează ne propunem să arătăm că fiind dată o formă pătratică f_b, există o bază B′ a lui V faţă de care f_b are matricea diagonală, adică $M_{b,B'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$. Atunci, dacă pentru x∈V, $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ avem: $f_b(x) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$ (numită *forma canonică* a lui f_b).

În continuare vom prezenta două metode de aducere a unei forme pătratice la forma canonică cunoscute sub numele de metoda lui *Gauss-Lagrange* şi respectiv *Jacobi*.

a) Metoda Gauss-Lagrange

Să presupunem că în raport cu o bază iniţială B, f_b are forma:

(1) $$\begin{aligned} f_b(x) = a_{11}x_1^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + 2a_{23}x_2x_3 + \\ + 2a_{24}x_2x_4 + \ldots + 2a_{2n}x_2x_n + \ldots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \end{aligned}.$$

Dacă f_b este nulă (adică $a_{ij}=0$ pentru orice $1\leq i,j\leq n$) atunci f_b are forma canonică în orice bază B a lui V. De asemenea, putem presupune că există $i\in\{1, 2, \ldots, n\}$ a.î. $a_{ii}\neq 0$. În caz contar, cum f_b este presupusă nenulă există cel puțin o pereche (i, j) a.î. $a_{ij}\neq 0$. Să presupunem că $a_{12}\neq 0$ (în cazul general se va proceda analog). Atunci notând $x_1=y_1+y_2$, $x_2=y_1-y_2$ şi $x_k=y_k$ pentru $2\leq k\leq n$ vom obține pentru f_b o expresie de forma $f_b(y)=2a_{12}y_1^2+\ldots$ cu $2a_{12}\neq 0$.

Putem presupune deci că de exemplu $a_{11}\neq 0$.

Vom grupa într-o primă etapă toți termenii lui f_b ce conțin pe x_1 :

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\ldots+2a_{1n}x_1x_n=$$

$$=a_{11}\left(x_1^2+2\frac{a_{12}}{a_{11}}x_1x_2+\ldots+2\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n\right)=$$

$$=a_{11}\left[\left(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\ldots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2+E_1(x_2,\ldots,x_n)\right]$$

unde $E_1(x_2, \ldots, x_n)$ unde este o expresie (de fapt tot o formă pătratică) ce conține numai pe $x_2, \ldots, x_n$ (deci nu mai conține pe x_1).

Notând (2) $y_1=x_1+\frac{a_{21}}{a_{11}}x_2+\ldots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$ obținem pentru f_b o expresie de forma : $f_b=a_{11}y_1^2+a_{11}E_1(x_2,\ldots,x_n)$+restul de termeni din expresia (1) a lui f_b (care nu mai conțin pe x_1).

Obținem deci o expresie a lui f_b de forma: $f_b=a_{11}y_1^2+E_1'(x_2,\ldots,x_n)$ (cu y_1 dat de (2)). Continuând procedeul pentru $E_1'(x_2,\ldots,x_n)$ (care este de fapt o formă pătratică ce nu mai conține pe x_1), după un număr finit de paşi găsim o expresie a lui f_b de forma :

$$(3)\quad f_b(y)=\lambda_1y_1^2+\ldots+\lambda_ny_n^2$$

cu $\lambda_1, \ldots, \lambda_n\in\mathbb{R}$ şi y_i de forma :

$$(4)\quad \begin{cases} y_1 = x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n \\ y_2 = x_2 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ y_n = x_n \end{cases}.$$

Egalitățile (4) se scriu matriceal sub forma: (5) y = Ax cu $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Ținând cont de Teorema 7.2. de la Capitolul 6 deducem că egalitatea (5) este echivalentă cu $x_{B'} = C^{-1} x_B$ (unde B′ este baza $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ în raport cu care f_b are forma (3)).

Astfel, dacă notăm cu C = $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$ matricea de trecere de la B la B′, atunci $C^{-1}=A \Leftrightarrow C=A^{-1}$ şi astfel $\begin{cases} e'_1 = c_{11}e_1 + \dots + c_{n1}e_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e'_n = c_{1n}e_1 + \dots + c_{nn}e_n \end{cases}$.

Exemplu. Folosind metoda Gauss-Lagrange să aducem la forma canonică forma pătratică $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2x_3 .$$

Grupăm la început termenii ce conțin pe x_1 :

$$2x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 = 2\left(x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3\right) =$$
$$= 2\left[\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3\right)^2 - \frac{1}{4}x_2^2 - x_3^2 - x_2x_3\right] = 2y_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_2x_3$$

cu (1) $y_1 = x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3$.

Continuând avem :

$$\begin{aligned} f &= (2y_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_2x_3) + (3x_2^2 - x_3^2 + 3x_2x_3) = \\ &= 2y_1^2 + (\frac{5}{2}x_2^2 - 3x_3^2 + x_2x_3) \end{aligned} . \quad (2)$$

Considerăm acum doar termenii din (2) ce conțin pe x_2 :

$$\frac{5}{2}x_2^2 + x_2x_3 = \frac{5}{2}(x_2^2 + \frac{2}{5}x_2x_3) = \frac{5}{2}[(x_2 + \frac{1}{5}x_3)^2 - \frac{1}{25}x_3^2] = \frac{5}{2}y_2^2 - \frac{1}{10}x_3^2,$$

cu (3) $y_2 = x_2 + \frac{1}{5}x_3$ astfel că din (2) deducem:

$$f = 2y_1^2 + ((\frac{5}{2}y_2^2 - \frac{1}{10}x_3^2) - 3x_3^2) = 2y_1^2 + \frac{5}{2}y_2^2 - \frac{31}{10}x_3^2. \ (4)$$

Notând (5) $y_3=x_3$ din (4) deducem că

$$f(y) = 2y_1^2 + \frac{5}{2}y_2^2 - \frac{31}{10}y_3^2. (6)$$

Din (1), (3) şi (5) deducem că $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Dacă notăm cu C matricea de trecere de la B la B′ atunci $C = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -9/10 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Astfel $\begin{cases} e_1' = e_1 = (1,0,0) \\ e_2' = -\frac{1}{2}e_1 + e_2 = (-\frac{1}{2},1,0) \\ e_3' = -\frac{9}{10}e_1 - \frac{1}{5}e_2 + e_3 = (-\frac{9}{10},-\frac{1}{5},1) \end{cases}$.

Deci noua bază din $\mathbb{R}^3$ în raport cu care f are forma canonică (6) este B′={e′$_1$, e′$_2$, e′$_3$} cu $e_1' = (1,0,0)$, $e_2' = (-\frac{1}{2},1,0)$, $e_3' = (-\frac{9}{10},-\frac{1}{5},1)$.

b) Metoda lui Jacobi

Fie B={e_1,…, e_n}⊆V baza în raport cu care forma pătratică f_b are matricea $M_{b,B}=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$.

Teorema 2.5. (***Jacobi***). **Dacă în matricea $M_{b,B}$ minorii** $\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix}$**, i=1, 2, …, n sunt nenuli, atunci există o bază $B'=\{e'_1,\dots, e'_n\}$ a lui V în raport cu care f_b va avea expresia:** $f_b(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} y_i^2$ **cu $\Delta_0=1$ iar $y_1, \dots, y_n$ coordonatele lui x în raport cu baza B′.**

Demonstrație. Fie $\mathbf{b}: V\times V\to\mathbb{R}$ polara lui f_b. Vom căuta vectorii $e'_1,\dots, e'_n$ sub forma :

$$(1)\ \begin{cases} e'_1 = \alpha_{11}e_1 \\ e'_2 = \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2 \\ e'_3 = \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 + \alpha_{33}e_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e'_n = \alpha_{n1}e_1 + \alpha_{n2}e_2 + \alpha_{n3}e_3 + \dots + \alpha_{nn-1}e_{n-1} + \alpha_{nn}e_n \end{cases}.$$

a.î. $\mathbf{b}(e'_i, e'_j)=0$ pentru $1\le i\ne j\le n$.

Observăm că dacă pentru orice i=2, 3, …, n, $\mathbf{b}(e'_i, e_j)=0$ pentru $1\le j\le i-1$ atunci (1) are loc. Într-adevăr, pentru j<i, $\mathbf{b}(e'_i, e'_j)= =\mathbf{b}(e'_i, \alpha_{j1}e_1+\dots+\alpha_{jj}e_j)=\alpha_{j1}\mathbf{b}(e'_i, e_1)+\dots+\alpha_{jj}\,\mathbf{b}(e'_i, e_j)=0$. Cum **b** este formă biliniară simetrică deducem că $\mathbf{b}(e'_i, e'_j)=0$ şi pentru j>i.

Astfel, pentru fiecare i ($1\le i\le n$) determinăm vectorul $e'_i=\alpha_{i1}e_1+\dots+\alpha_{ii}e_i$ a.î. $\mathbf{b}(e'_i, e_j)=0$ pentru orice $1\le j\le i-1$ şi $\mathbf{b}(e'_i, e_i)=1$.

Se obține sistemul:

$$(S_i)\ \begin{cases} a_{11}\alpha_{i1} + a_{12}\alpha_{i2} + \dots + a_{1i}\alpha_{ii} = 0 \\ a_{21}\alpha_{i1} + a_{22}\alpha_{i2} + \dots + a_{2i}\alpha_{ii} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i-1,1}\alpha_{i1} + a_{i-1,2}\alpha_{i2} + \dots + a_{i-1,i}\alpha_{ii} = 0 \\ a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \dots + a_{ii}\alpha_{ii} = 1 \end{cases}.$$

Cum determinantul lui (S_i) este $\Delta_i\ne 0$ deducem că (S_i) este sistem Cramerian şi deci are soluție unică. Deducem în particular că

$\alpha_{ii}=\dfrac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}$, $1\le i\le n$. Matricea formei pătratice f_b în raport cu baza B′ va avea pe poziția (i, j) cu $i\neq j$ elementul $a'_{ij}=\mathbf{b}(e'_i, e'_j)=0$ iar pe poziția (i, i) ($1\le i\le n$) elementul

$$a'_{ii}=\mathbf{b}(e'_i, e'_i)=\mathbf{b}(e'_i, \alpha_{i1}e_1+\ldots+\alpha_{i,i-1}e_{i-1}+\alpha_{ii}e_i)$$
$$=\alpha_{i1}\mathbf{b}(e'_i, e_1)+\ldots+\alpha_{i,i-1}\mathbf{b}(e'_i, e_{i-1})+\alpha_{ii}\mathbf{b}(e'_i, e_i)=\alpha_{ii}=\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}.$$

Deducem că în baza B′ forma pătratică f_b va avea forma canonică $f(y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ii}y_i^2=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}y_i^2$.■

Exemplu. Folosind metoda lui Jacobi să se aducă la forma canonică forma pătratică $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2$.

Matricea lui f în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}^3$ este $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

Deoarece $\Delta_1=1$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=1$ şi $\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=3$ sunt nenuli, putem aplica metoda lui Jacobi. Deducem că forma canonică în raport cu baza $B'=\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ va fi $f(y)=y_1^2+y_2^2+\dfrac{1}{3}y_3^2$, unde $\tilde{y}_{B'}=(y_1, y_2, y_3)$.

Alegând $e'_1=\alpha_{11}e_1$ şi notând cu **b** polara lui f, din condiția $\mathbf{b}(e'_1, e_1)=1$ deducem că $\alpha_{11}=1$ deci $e'_1=e_1=(1, 0, 0)$.

Căutăm pe e'_2 sub forma $e'_2=\alpha_{21}e_1+\alpha_{22}e_2$ iar din condițiile $\mathbf{b}(e'_2, e_1)=0$ şi $\mathbf{b}(e'_2, e_2)=1$ rezultă sistemul $\begin{cases}\alpha_{21}-\alpha_{22}=0\\ -\alpha_{21}+2\alpha_{22}=1\end{cases}$, de unde $\alpha_{21}=\alpha_{22}=1$, adică $e'_2=e_1+e_2=(1, 1, 0)$.

În sfârşit căutăm pe e'_3 pe sub forma $e'_3=\alpha_{31}e_1+\alpha_{32}e_2+\alpha_{33}e_3$ iar din condiţiile $\mathbf{b}(e'_3, e_1) = \mathbf{b}(e'_3, e_2) = 0$ şi $\mathbf{b}(e'_3, e_3) = 1$ găsim sistemul $\begin{cases}\alpha_{31}-\alpha_{32}=0\\ -\alpha_{31}+2\alpha_{32}=0\\ 3\alpha_{33}=1\end{cases}$, ce are soluţia $\alpha_{31}=\alpha_{32}=0$ şi $\alpha_{33}=\frac{1}{3}$.

Deducem că $e'_3=\frac{1}{3}e_3=(0, 0, \frac{1}{3})$.

Deci baza B′ în raport cu care f are forma canonică este $B'=\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ cu $e'_1=e_1=(1, 0, 0)$, $e'_2=e_1+e_2=(1, 1, 0)$ şi $e'_3=\frac{1}{3}e_3=$ $=(0, 0, \frac{1}{3})$.

Definiţia 2.6. Vom spune despre forma pătratică $f:V\to\mathbb{R}$ că este :

(i) ***pozitiv semidefinită*** **dacă $f(x)\geq 0$ pentru orice $x\in V$**

(ii) ***negativ semidefinită*** **dacă $f(x)\leq 0$ pentru orice $x\in V$**

(iii) ***pozitiv definită*** **dacă $f(x)>0$ pentru orice $x\in V$, $x\neq 0$**

(iv) ***negativ definită*** **dacă $f(x)<0$ pentru orice $x\in V$, $x\neq 0$**

(v) ***nedefinită*** **dacă există $x, y\in V$ a.î. $f(x)>0$ şi $f(y)<0$.**

Teorema 2.7. Forma pătratică $f:V\to\mathbb{R}$ este pozitiv definită dacă şi numai dacă în forma sa canonică $f(y)=\lambda_1 y_1^2+...+\lambda_n y_n^2$, λ_1, …, λ_n sunt strict pozitivi.

Demonstraţie. „⇒”. Să presupunem că f este pozitiv definită şi fie $B=\{e_1,\dots, e_n\}$ o bază a lui V în raport cu care f are forma canonică din enunţ. Dacă prin absurd ar exista $i\in\{1, 2, \dots, n\}$ a.î. $\lambda_i\leq 0$ atunci $f(e_i)=\lambda_i\leq 0$ –absurd. Deci $\lambda_i>0$ pentru orice $i\in\{1, 2, \dots, n\}$.

„⇐”. Evident. ■

Teorema 2.8. (*Legea inerţiei a lui Sylvester*). Numărul coeficienţilor nenuli, iar dintre aceştia numărul coeficienţilor strict pozitivi într-o formă canonică a unei forme pătratice nu depinde de baza în care acea formă are forma canonică.

Demonstrație. Fie B = $\{e_1,\ldots, e_n\}\subseteq V$ o bază în raport cu care f are forma canonică:

$$(1) \quad f(x) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_p x_p^2 + \mu_{p+1} x_{p+1}^2 + \ldots + \mu_{p+q} x_{p+q}^2$$

cu $\lambda_1, \ldots, \lambda_p > 0$ şi $\mu_{p+1}, \ldots, \mu_{p+q} < 0$ iar $B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ o altă bază a lui V în raport cu care f are expresia canonică:

$$(2) \quad f(x) = \lambda'_1 x_1^2 + \ldots + \lambda'_{p'} x_{p'}^2 + \mu'_{p'+1} x_{p'+1}^2 + \ldots + \mu'_{p'+q'} x_{p'+q'}^2$$

cu $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_{p'} > 0$ şi $\mu'_{p'+1}, \ldots, \mu'_{p'+q'} < 0$.

Ne propunem să arătăm că $p = p'$ şi $q = q'$.

Să presupunem prin absurd că $p > p'$ şi să considerăm spațiile $V' = \langle e_1, \ldots, e_p \rangle$ şi $V'' = \langle e'_{p'+1}, \ldots, e'_n \rangle$.

Deducem imediat că $\dim_{\mathbb{R}}(V') = p$ iar $\dim_{\mathbb{R}}(V'') = n-p'$.

Se ştie că $\dim_{\mathbb{R}}(V'+V'') = \dim_{\mathbb{R}}(V')+\dim_{\mathbb{R}}(V'')-\dim_{\mathbb{R}}(V'\cap V'')$ (vezi Corolarul 3.20. de la Capitolul 6) şi cum $p+(n-p')=n+(p-p')>n$ dacă $V'\cap V''=\{0\}$ am deduce că $\dim_{\mathbb{R}}(V'+V'') > n$ – absurd !.

Deci există un vector nenul $x\in V'\cap V''$ $(x\neq 0)$.

Să presupunem că $\widetilde{x}_B=(x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$ şi $\widetilde{x}_{B'}=(0, \ldots, 0, y_{p'+1}, \ldots, y_n)$.

Din (1) şi (2) deducem pe de o parte că $f(x) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_p x_p^2 > 0$ (deoarece din $x\neq 0$ avem că cel puțin un $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ este diferit de 0 !) iar pe de altă parte tot $f(x) = \mu'_{p'+1} x_{p'+1}^2 + \ldots + \mu'_{p'+q'} x_{p'+q'}^2 \leq 0$ –absurd.

Deci $p\leq p'$. Analog $p'\leq p$ de unde $p = p'$. La fel arătăm că şi $q = q'$. ■

Definiția 2.9. Numărul coeficienților strict pozitivi (negativi) dintr-o formă canonică a unei forme pătratice poartă numele de *indicele pozitiv (negativ) de inerție*.

◈ ◈ ◈

Bibliografie

1. **Atiyah M., Mac Donald I., Introduction to commutative algebra**, Addison Wesley Publishing Company, 1969.

2. **Buşneag D., Teoria grupurilor**, Ed. Universitaria, Craiova, 1994.

3. **Buşneag D., Capitole speciale de algebră**, Ed. Universitaria, Craiova, 1997.

4. **Buşneag D., Chirteş Fl., Piciu D., Aritmetică şi teoria numerelor**, Ed. Universitaria, Craiova.

5. **Buşneag D., Chirteş Fl., Piciu D., Algebra**, Ed. Universitaria, Craiova, 2001.

6. **Cohn P. M., Algebra**, vol 1, John Wiley and sons, 1974.

7. **Dincă Al., Lecții de algebră**, Ed. Universitaria, Craiova, 2000.

8. **Gabriel P., Des Categories Abeliennes** (These sc. Math., Paris, 1961), Bull. Soc. Math, France, 90, pp323-448, 1962.

9. **Ion D. I., Radu N., Algebra**, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1991.

10. **Lambek J., Lectures on Rings and Modules**, Blaisdell Publishing Company, 1966.

11. **Năstăsescu C., Inele, Module, Categorii**, Ed. Academiei, Bucureşti, 1976.

12. **Năstăsescu C., Teoria dimensiunii în algebra necomutativă**, Ed. Academiei, Buucureşti, 1983.

13. **Năstăsescu C., Niță C., Vraciu C., Bazele algebrei**, vol.1, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.

14. **Popescu N., Categorii abeliene**, Ed. Academiei, Bucureşti, 1971.

15. **Radu N.**, (coordonator) **Algebră**, Ed. All, Bucureşti, 1998.

16. **Vladimirescu I., Matematici speciale, Note de curs**, Reprografia Universităţii din Craiova, 1987.

17. **Vladimirescu I., Popescu M., Algebră liniară şi geometrie analitică**, Ed. Universitaria, Craiova, 1994.